# Calcul matriciel

*Bernard Ycart*

Ce chapitre est essentiellement technique et ne requiert pas d'autre connaissance théorique que celle des espaces vectoriels de dimension finie. Vous y apprendrez les manipulations élémentaires de matrices, qui ne devraient pas vous poser de problème si vous avez bien compris la résolution des systèmes linéaires.

## Table des matières



8 novembre 2011

# 1 Cours

## 1.1 Opérations sur les matrices

Etant donnés deux entiers $m$ et $n$ strictement positifs, une *matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes* est un tableau rectangulaire de réels $A = (a_{i,j})$. L'indice de ligne $i$ va de 1 à $m$, l'indice de colonne $j$ va de 1 à $n$.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} .$$

Les entiers $m$ et $n$ sont les *dimensions* de la matrice, $a_{i,j}$ est son *coefficient d'ordre* $(i, j)$. L'ensemble des matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ce qui suit s'applique aussi, si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, à l'ensemble des matrices à coefficients complexes.

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une addition interne (on peut ajouter deux matrices de mêmes dimensions terme à terme) et d'une multiplication externe (on peut multiplier une matrice par un réel terme à terme).

- *Addition :* Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, leur somme $A + B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Multiplication externe :* Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et $\lambda$ est un réel, le produit $\lambda A$ est la matrice $(\lambda a_{i,j})$. Par exemple :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Observons que les opérations auraient le même effet si les matrices étaient disposées comme des $mn$-uplets de réels (toutes les lignes étant concaténées par exemple). Donc $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, muni de son addition et de sa multiplication externe, est un espace vectoriel, isomorphe à $\mathbb{R}^{mn}$. La *base canonique* de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls, sauf un qui vaut 1.

L'opération la plus importante est le *produit matriciel.*

**Définition 1.** *Soient $m, n, p$ trois entiers strictement positifs. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle* produit matriciel *de $A$ par $B$ la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \ldots, m$ et pour tout $k \in 1, \ldots, p$ par :*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}\ .$$

Nous insistons sur le fait que le produit $AB$ de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de $A$ et le nombre de lignes de $B$ sont les mêmes. Observons d'abord que la définition 1 est cohérente avec la définition du produit d'une matrice par un vecteur, donnée au chapitre précédent : si $p = 1$, la matrice $B$ a $n$ lignes et 1 colonne, et le produit $AB$ a $m$ lignes et 1 colonne. D'autre part, appliquer la définition 1 revient à effectuer successivement le produit de $A$ par chacune des colonnes de $B$. Pour effectuer ce produit, nous conseillons d'adopter la même disposition que pour le produit par un vecteur, en plaçant $B$ au-dessus et à droite de $A$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{j,k} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & \vdots & & c_{1,p} \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{i,k} & & \\ & & & & \\ c_{m,1} & & & & c_{m,p} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Posons par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

La matrice $A$ a 3 lignes et 2 colonnes, la matrice $B$ a 2 lignes et 4 colonnes. Le produit $AB$ a donc un sens : c'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Le produit matriciel a toutes les propriétés que l'on attend d'un produit, sauf qu'il n'est pas commutatif.

**Proposition 1.** *Le produit matriciel possède les propriétés suivantes.*

1. Associativité : *Si les produits $AB$ et $BC$ sont définis, alors les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont aussi et ils sont égaux.*

$$A(BC) = (AB)C\ .$$

2. Linéarité à droite : *Si $B$ et $C$ sont deux matrices de mêmes dimensions, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels et si $A$ a autant de colonnes que $B$ et $C$ ont de lignes, alors*

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC\ .$$

3. Linéarité à gauche : *Si $A$ et $B$ sont deux matrices de mêmes dimensions, si $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels et si $C$ a autant de lignes que $A$ et $B$ ont de colonnes, alors*

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC\ .$$

Ces propriétés se démontrent à partir de la définition 1.

La transposition est une notion importante, dont la justification provient de la dualité, qui dépasse le cadre de ce cours.

**Définition 2.** *Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, sa* transposée *est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'ordre $(j,i)$ est $a_{i,j}$.*

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^t\!A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Observons que la transposée de la transposée est la matrice initiale.

$${}^t({}^t\!A) = A\ .$$

La transposée d'un produit est le produit des transposées, mais il faut inverser l'ordre des facteurs.

**Proposition 2.** *Soient $m, n, p$ trois entiers strictement positifs. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée du produit de $A$ par $B$ est le produit de la transposée de $B$ par la transposée de $A$.*

$${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A\ .$$

Par exemple, en reprenant les matrices $A$ et $B$ définies ci-dessus :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observons que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} .$$

Le résultat est une matrice *carrée* (autant de lignes que de colonnes) et *symétrique*.

**Définition 3.** *Soit $n$ un entier strictement positif et $A$ une matrice carrée à $n$ lignes et $n$ colonnes. On dit que $A$ est symétrique si pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, ce qui est équivalent à dire que $A$ est égale à sa transposée.*

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique. En effet :

$${}^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA .$$

## 1.2 Matrices carrées

En général si le produit $AB$ est défini, le produit $BA$ n'a aucune raison de l'être. Le produit d'une matrice par sa transposée est une exception, les matrices carrées en sont une autre : si $A$ et $B$ sont deux matrices à $n$ lignes et $n$ colonnes, les produits $AB$ et $BA$ sont tous deux définis et ils ont les mêmes dimensions que $A$ et $B$. En général ils ne sont pas égaux. Par exemple,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous noterons simplement $\mathcal{M}_n$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes, à coefficients réels. Parmi elles la *matrice identité*, notée $I_n$ joue un rôle particulier.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, elle est l'élément neutre du produit matriciel : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

$$A\,I_n = I_m\,A = A\ .$$

On le vérifie facilement à partir de la définition 1.

**Définition 4.** *Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n$. On dit que $A$ est inversible s'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n$, notée $A^{-1}$, telle que*

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n\ .$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin une méthode qui permet de savoir si une matrice est inversible, et de calculer son inverse quand elle l'est. Observons que l'inverse, s'il existe, est nécessairement unique. En effet, soient $B_1$ et $B_2$ deux matrices telles que $A\,B_1 = B_1\,A = I_n$ et $A\,B_2 = B_2\,A = I_n$. En utilisant l'associativité, le produit $B_1\,A\,B_2$ vaut $B_1\,(A\,B_2) = B_1\,I_n = B_1$, mais aussi $(B_1\,A)\,B_2 = I_n\,B_2 = B_2$. Donc $B_1 = B_2$.

Il suffit de trouver une matrice $B$ telle que $A\,B = I_n$ pour être sûr que $A$ est inversible et que son inverse est $B$.

**Théorème 1.** *Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n$. Supposons qu'il existe une matrice $B$ telle que $A\,B = I_n$* ou bien *$B\,A = I_n$. Alors $A$ est inversible et $B = A^{-1}$.*

*Démonstration* : Supposons qu'il existe une matrice $B$ telle que $A\,B = I_n$. Considérons l'application, de $\mathcal{M}_n$ dans lui-même, qui à une matrice $X$ associe le produit $X\,A$. D'après le point *3* de la proposition 1, c'est une application linéaire, donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$. Montrons qu'elle est injective, c'est-à-dire que son noyau ne contient que la matrice nulle. Si $X\,A = 0$, alors $(X\,A)\,B = 0$, mais $(X\,A)\,B = X\,(A\,B) = X\,I_n = X$ par hypothèse : donc $X = 0$. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension qui est injective est aussi surjective. Donc il existe une matrice $X$ telle que $X\,A = I_n$. Il reste à vérifier que cette matrice est $B$. Si $X\,A = A\,B = I_n$, alors $X\,(A\,B) = X$ et $(X\,A)\,B = B$. D'où le résultat.

On procède de façon symétrique si $B\,A = I_n$, en considérant l'application qui à $X$ associe $A\,X$. □

Si $A$ et $B$ sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$, leur produit est inversible.

**Proposition 3.** *Soient $A$ et $B$ deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. Le produit $AB$ est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.*

*Démonstration* : Nous utilisons le théorème 1, ainsi que l'associativité du produit :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n\ .$$

□

## 1.3 Matrices et applications linéaires

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_m)$.
Une application linéaire $f$ est déterminée par les images des vecteurs $b_1, \ldots, b_n$. Ces images sont des combinaisons linéaires $c_1, \ldots, c_m$ : pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i \;.$$

Les coordonnées $a_{i,j}$ de ces vecteurs dans la base $(c_1, \ldots, c_m)$, rangés en $n$ colonnes, forment la matrice de l'application $f$, relative aux bases considérées.

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent en des opérations analogues sur les matrices. Soient $f$, $g$ deux applications linéaires de $E$ dans $F$ et $\lambda$, $\mu$ deux réels. Si les matrices de $f$ et $g$ (relatives aux mêmes bases au départ et à l'arrivée) sont $A$ et $B$, alors la matrice de $\lambda f + \mu g$ est $\lambda A + \mu B$. La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire. Sa matrice est le produit des matrices de $f$ et $g$.

**Proposition 4.** *Soient $E, F, G$ trois espaces vectoriels, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & f & & g & \\
E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\
u & \longmapsto & f(u) & \longmapsto & g \circ f(u) = g(f(u))\;.
\end{array}$$

*Soient $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de $E$, $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de $F$ et $(d_1, \ldots, d_p)$ une base de $G$.*
*Soit $A$ la matrice de $f$ relative aux bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_m)$.*
*Soit $B$ la matrice de $g$ relative aux bases $(c_1, \ldots, c_m)$ et $(d_1, \ldots, d_p)$.*
*Alors la matrice de $g \circ f$ relative aux bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(d_1, \ldots, d_p)$ est le produit $BA$.*

Remarquez que l'ordre dans lequel s'effectue le produit est l'ordre dans lequel s'écrit la composition.

$$\text{matrice de } g \circ f = (\text{matrice de } g)\,(\text{matrice de } f)\;.$$

*Démonstration :* L'image par $g \circ f$ des vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ se calcule en prenant l'image par $g$ des vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. On calcule les coordonnées de ces images dans la base $(d_1, \ldots, d_p)$ en effectuant le produit par la matrice de $g$, des vecteurs exprimant $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ dans la base $(c_1, \ldots, c_m)$, qui sont les vecteurs colonnes de $A$. Effectuer successivement le produit de $B$ par chacun des vecteurs colonnes de $A$ revient à calculer le produit de $B$ par $A$. □

Pour les endomorphismes (les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes), nous conviendrons toujours de choisir la même base au départ et à l'arrivée.

**Proposition 5.** *Soit $E$ un espace vectoriel, muni de la base $(b_1, \ldots, b_n)$, et $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même. L'application $f$ est un automorphisme si et seulement si la matrice de $f$ dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ est inversible. Si c'est le cas, la matrice de $f^{-1}$ est l'inverse de la matrice de $f$.*

*Démonstration :* Observons d'abord que la matrice de l'application identique est la matrice identité, quelle que soit la base. Si l'application $f$ est bijective, alors sa réciproque $f^{-1}$ est l'unique application dont la composée avec $f$ est l'application identique.

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_E \; .$$

Si $A$ est la matrice de $f$ et $B$ la matrice de $f^{-1}$, la proposition 4 entraîne que $A\,B = B\,A = I_n$.

Réciproquement si $A$ est inversible, alors $A^{-1}$ définit une application linéaire unique de $E$ dans $E$. La composée de cette application avec $f$ a pour matrice $I_n$ : c'est l'application identique. Donc cette application est la réciproque de $f$. □

Un automorphisme de $E$ est une application linéaire qui envoie une base de $E$ sur une autre base. Effectuer un changement de base (remplacer une base par une autre) revient à prendre l'image par l'automorphisme qui envoie la nouvelle base sur l'ancienne, donc le produit par la matrice de cet automorphisme.

**Proposition 6.** *Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_n)$ deux bases de $E$. Notons $P$ la matrice dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ de l'application qui à $b_i$ associe $c_i$ (nouveaux vecteurs en fonction des anciens). Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées de $v$ dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ (anciennes) et $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées de $v$ dans la base $(c_1, \ldots, c_n)$ (nouvelles).*

$$v = x_1\,b_1 + \cdots + x_n\,b_n = y_1\,c_1 + \cdots + y_n\,c_n \; .$$

*Alors le vecteur $(y_j)_{j=1,\ldots,n}$ est le produit de la matrice $P^{-1}$ par le vecteur $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$.*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; .$$

*Démonstration :* Notons $\phi$ l'automorphisme de $E$ qui à $b_i$ associe $c_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ecrivons :

$$\begin{aligned} v &= y_1\, c_1 + \cdots + y_n\, c_n \\ &= y_1\, \phi(b_1) + \cdots + y_n\, \phi(b_n) \ . \end{aligned}$$

Par définition, les coordonnées de $\phi(b_j)$ dans la base $b_i$ forment la $j$-ième colonne de la matrice $P = (p_{i,j})$. Donc :

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} y_j \left( \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\, b_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, y_j \right) b_i \end{aligned}$$

Comme les coordonnées dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ sont uniques, on en déduit, pour tout $i = 1, \ldots, n$ :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, y_j \ ,$$

donc $(x_i) = P(y_j)$, d'où le résultat en multipliant à gauche par $P^{-1}$. □

La matrice $P$ s'appelle la *matrice de passage*. Dans un changement de base, nous conviendrons toujours de noter $P$ la matrice qui donne les nouveaux vecteurs en fonction des anciens. Voici un exemple. Munissons $E = \mathbb{R}^3$, des deux bases suivantes.

$$(b_1, b_2, b_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) \quad \text{et} \quad (c_1, c_2, c_3) = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)) \ .$$

Voici la matrice de passage $P$ et son inverse.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Si un vecteur $v$ a pour coordonnées $x, y, z$ dans la base canonique $(b_1, b_2, b_3)$, alors ses coordonnées dans la base $(c_1, c_2, c_3)$ s'obtiennent en effectuant le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$$

Constatez que :

$$(x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1) = (x,y,z) \ .$$

On peut appliquer ce qui précède pour trouver la matrice d'un endomorphisme quelconque dans la nouvelle base : c'est la *formule de changement de base*.

**Théorème 2.** *Soit $E$ un espace vectoriel, soient $(b_1, \dots, b_n)$ et $(c_1, \dots, c_n)$ deux bases de $E$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$, et $A$ sa matrice dans la base $(b_1, \dots, b_n)$. Soit $P$ la matrice de l'application linéaire qui à $b_i$ associe $c_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$.*

*La matrice de $f$ dans la base $(c_1, \dots, c_n)$ est $P^{-1}\,A\,P$.*

*Démonstration :* Notons $\phi$ l'application qui à $b_i$ associe $c_i$. La matrice de $f$ dans la base $(c_1, \dots, c_n)$ a pour vecteurs colonnes les images des vecteurs $c_1, \dots, c_n$. Pour calculer $f(c_i)$, on peut calculer $f(\phi(b_i)) = f \circ \phi(b_i)$. Donc les coordonnées des vecteurs $f(c_i)$ dans la base $(b_1, \dots, b_n)$ sont les colonnes de la matrice de $f \circ \phi$, qui est $AP$. D'après la proposition 6, pour obtenir les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(c_1, \dots, c_n)$, il faut multiplier à gauche par la matrice $P^{-1}$, d'où le résultat. □

Reprenons l'exemple en dimension 3 des deux bases :

$$(b_1, b_2, b_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad \text{et} \quad (c_1, c_2, c_3) = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))\ .$$

Considérons l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\ :\quad (x,y,z) \longmapsto (x-z, 2x-3y+z, y-2z)\ .$$

Sa matrice dans la base canonique $(b_1, b_2, b_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f$ dans la base $(c_1, c_2, c_3)$ est :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image par $f$ du vecteur $c_2 = (1,1,0)$ est le vecteur $(1,-1,1) = 2c_1 - 2c_2 + c_3$. Les coordonnées $2, -2, 1$ figurent dans la seconde colonne de $P^{-1}AP$.

**Définition 5.** *Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n$ sont dites semblables si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n$ telle que :*

$$B = P^{-1}AP\ .$$

Le théorème 2 affirme que deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Il se généralise à des applications linéaires quelconques, comme suit.

**Théorème 3.** *Soit $E$ un espace vectoriel, soient $(b_1, \dots, b_n)$ et $(b'_1, \dots, b'_n)$ deux bases de $E$. Soit $F$ un autre espace vectoriel, soient $(c_1, \dots, c_m)$ et $(c'_1, \dots, c'_m)$ deux bases de $F$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$, et $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ sa matrice relative aux bases $(b_1, \dots, b_n)$ et $(c_1, \dots, c_m)$. Soit $P \in \mathcal{M}_n$ la matrice de l'application linéaire qui à $b_i$ associe $b'_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit $Q \in \mathcal{M}_m$ la matrice de l'application linéaire qui à $c_i$ associe $c'_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$.*

*La matrice de $f$ relative aux bases $(b'_1, \dots, b'_n)$ et $(c'_1, \dots, c'_n)$ est $Q^{-1} A\, P$.*

La démonstration est pratiquement la même que celle du théorème 2, avec des notations plus lourdes. Nous l'omettons.

**Définition 6.** *Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont dites* équivalentes *si et seulement si il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n$ et $Q \in \mathcal{M}_m$ telles que :*

$$B = Q^{-1} A P \;.$$

Le théorème 3 affirme que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles peuvent représenter la même application linéaire, à un changement de base près dans les espaces de départ et d'arrivée.

## 1.4 Rang d'une matrice

Nous avons déjà défini la notion de rang pour une famille de vecteurs et pour une application linéaire :

1. le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous espace vectoriel qu'elle engendre,
2. le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de $E$, l'image de $f$ est le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par $(f(b_1), \dots, f(b_n))$. Donc le rang de $f$ est aussi le rang de la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ et ce, quelle que soit la base $(b_1, \dots, b_n)$. Ce rang ne dépend pas non plus de la base dans laquelle on écrit la famille $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ à l'arrivée : c'est le rang des vecteurs colonnes de la matrice de $f$, quelles que soient les bases par rapport auxquelles on écrit cette matrice.

**Définition 7.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle* rang *de la matrice $A$ la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.*

Observons que la connaissance du rang fournit un critère d'inversibilité.

**Proposition 7.** *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son rang est $n$.*

*Démonstration :* D'après la proposition 5, une matrice est inversible, si et seulement si elle représente une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Or une application linéaire est bijective si et seulement si l'image qu'elle donne d'une base est une base, c'est-à-dire si son rang est $n$. □

Le rang d'une matrice est celui des applications linéaires qu'elle représente, qui ne dépend pas des bases. Si deux matrices représentent la même application dans des bases différentes, elles auront nécessairement même rang. Rappelons (définition 6 et théorème 3) que deux matrices sont *équivalentes* si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, ou encore si on déduit l'une de l'autre en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible. Deux matrices équivalentes ont même rang. Nous allons démontrer la réciproque.

**Théorème 4.** *Deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

*Démonstration :* Nous devons démontrer que deux matrices ayant le même rang sont équivalentes. Soit $A$ une matrice à $m$ lignes, $n$ colonnes, et de rang $r$. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les $n$ vecteurs colonnes de $A$, qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Le rang de $A$ est la dimension de l'espace engendré par $(a_1, \ldots, a_n)$, qui est inférieure ou égale à $n$ et à $m$. Nous allons montrer que la matrice $A$ est équivalente à la matrice $J_r$ obtenue en complétant la matrice identité $I_r$ par des zéros, à droite et en dessous.

$$J_r = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccccc} 1 & & \cdots & & r & & \cdots & n \end{array} & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ m \end{array} \end{array}$$

Considérons l'application $f$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont la matrice relative aux bases canoniques est $A$. Nous voulons trouver une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée, telles que la matrice de $f$ relative à ces bases soit $J_r$.

Comme la dimension de l'image de $f$ est $r$, la dimension du noyau est $n-r$, d'après le théorème du rang. Soit $(c_1, \ldots, c_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $(b_1, \ldots, b_{n-r})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, choisissons un vecteur $v_i$ tel que $f(v_i) = c_i$. La famille

$$(v_1, \ldots, v_r, b_1, \ldots, b_{n-r})$$

est une base de $E$ : ceci a été établi dans la démonstration du théorème du rang.

Dans l'espace d'arrivée $F$, la famille $(c_1, \ldots, c_r)$ est une famille libre car c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$. On peut la compléter par $m-1$ vecteurs $c_{r+1}, \ldots, c_m$ de sorte que

$$(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_m)$$

soit une base de $F$.

Pour $i = 1, \ldots, r$, l'image de $v_i$ est $c_i$. Les images de $b_1, \ldots, b_{n-r}$ sont nulles : la matrice de $f$ relative aux bases $(v_1, \ldots, v_r, b_1, \ldots, b_{n-r})$ (au départ) et $(c_1, \ldots, c_m)$ (à l'arrivée) est la matrice $J_r$.

Puisque $A$ et $J_r$ sont équivalentes, il existe deux matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $J_r = Q^{-1}AP$, et donc $A = QJ_rP^{-1}$. Soit $B$ une autre matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, également de rang $r$. Il existe deux autres matrices inversibles $R$ et $S$ telles que $J_r = S^{-1}BR$. En multipliant à gauche par $Q$ et à droite par $P^{-1}$, on obtient :

$$A = (QS^{-1})B(RP^{-1}) \; .$$

Donc deux matrices de même taille et de même rang sont équivalentes. □

On déduit de la démonstration qui précède que $A$ et ${}^tA$ ont le même rang.

**Proposition 8.** *Une matrice et sa transposée ont même rang.*

*Démonstration :* Nous avons démontré qu'une matrice $A$ de rang $r$ est équivalente à la matrice $J_r$ obtenue en complétant $I_r$ par des zéros. Or ${}^tJ_r$ est du même type que $J_r$ : elle contient la matrice identité $I_r$, complétée par des zéros. Elle est aussi de rang $r$. Par la proposition 2, si $A = QJ_rP^{-1}$, la transposée de $A$ s'écrit :

$${}^tA = {}^t(P^{-1}){}^tJ_r{}^tQ \; .$$

Par la proposition 2, la transposée d'une matrice inversible est inversible. Nous avons donc montré que ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$, qui est de rang $r$. □

Déterminer le rang d'une matrice consiste à déterminer le rang de ses vecteurs colonnes, ou encore de ses vecteurs lignes, puisque ce sont les colonnes de la transposée. Pour ce faire, nous avons vu une méthode consistant à écrire un système homogène, puis à lui appliquer la méthode de Gauss.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \; .$$

Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leurs bases canoniques, et notons $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ qui a pour matrice $A$ relativement à ces bases. L'application linéaire $f$ peut être caractérisée de deux façons différentes.

1. $f$ est l'application qui à un $n$-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe le $m$-uplet $Ax$, dont la $i$-ième coordonnée vaut
$$a_{i,1}\, x_1 + \cdots + a_{i,n}\, x_n \; .$$
2. $f$ est l'application qui au $j$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ associe le $m$-uplet $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m})$, à savoir le $j$-ième vecteur colonne de $A$.

Le *noyau* de $f$ est l'ensemble des $n$-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, solutions du système homogène $(H)$ suivant.

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{1,j}\, x_j + & \cdots & +a_{1,n}\, x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{i,j}\, x_j + & \cdots & +a_{i,n}\, x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\, x_1 + & \cdots & +a_{m,j}\, x_j + & \cdots & +a_{m,n}\, x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Le *rang* de ce système est égal à la fois au rang de $f$, au rang de $A$, au rang de la famille des vecteurs colonnes de $A$ et au rang de la famille des vecteurs lignes. Pour le calculer, il suffit de mettre le système $(H)$ sous forme échelonnée : le rang est le nombre de pivots non nuls de la forme échelonnée. On peut aussi déduire de la forme échelonnée une base de l'image, c'est-à-dire une base de l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $A$. Il n'est pas indispensable de passer par le système $(H)$ pour cela. On peut très bien appliquer la méthode du pivot de Gauss en transformant la matrice $A$, sans écrire le système. Ceci revient à remplacer à chaque étape une matrice par une autre matrice telle que le noyau de l'application linéaire associée soit le même : le rang n'est donc pas modifié. Voici un exemple.

Considérons la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient d'ordre $(1,1)$ est non nul, il n'y a donc pas de permutations à effectuer. Le premier pivot est $p_1 = 1$. Voici les transformations qui annulent la première colonne au-dessous du pivot.

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le second pivot est $-1$. Les transformations qui annulent le bas de la seconde colonne sont les suivantes.

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un troisième pivot non nul, il faut échanger les deux dernières colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième pivot est $-2$. Il ne reste qu'une ligne à transformer.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice est donc 3. En n'oubliant pas que les colonnes 3 et 4 ont été échangées, on obtient aussi que les vecteurs colonnes numéros 1, 2 et 4 de la matrice $A$ forment une famille libre, donc une base de l'espace engendré.

Bien que l'écriture du système soit mathématiquement superflue, elle est techniquement plus sûre, et nous vous conseillons de la conserver.

## 1.5 Calcul de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Chercher un $n$-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $Ax = b$, c'est résoudre un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues. Si la matrice $A$ est inversible, alors la solution s'écrit $x = A^{-1}b$. La méthode du pivot de Gauss parmet de résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, donc de calculer $x = A^{-1}b$. Les coefficients de $A^{-1}$ se lisent sur le système résolu. Voici ce qu'on obtient pour une matrice $A$ à deux lignes et deux colonnes.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ \\ 3x & +4y & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ \\ & -2y & = & b - 3a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a + b \\ \\ y & = & \frac{1}{2}(3a - b) \end{array}\right.$$

Les coefficients de $A^{-1}$ sont ceux de $a$ et $b$ dans l'expression de $x$ et $y$. Dans le cas général on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} ,$$

si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. L'expression de $A^{-1}$ est facile à mémoriser. Pour inverser une matrice à deux lignes et deux colonnes, il faut :

1. échanger les deux coefficients diagonaux
2. changer le signe des deux autres
3. diviser tous les coefficients par le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas de formule générale aussi facile. La technique la plus sûre consiste à résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, avec la méthode du pivot de Gauss, puis à écrire ensuite que la solution obtenue est le produit de $A^{-1}$ par le second membre.

Soit par exemple à inverser la matrice $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ,$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right.$$

Voici les différentes étapes de la résolution par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & -z & = & a \\ & -y & +z & = & b-a \\ & -y & +2z & = & c-a \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & -z & = & a \\ & -y & +z & = & b-a \\ & & z & = & c-b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & -z & = & a \\ & y & -z & = & a-b \\ & & z & = & c-b \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & & = & a-b+c \\ & y & & = & a-2b+c \\ & & z & = & -b+c \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ,$$

avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

# 2 Entraînement

## 2.1 Vrai ou faux

**Vrai-Faux 1.** Soient $A$ et $B$ deux matrices. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si le produit $AB$ est défini, alors le produit $BA$ est défini.
2. ☐ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $AB$ est défini.
3. ☒ Si le produit $AB$ est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini.
4. ☒ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini.
5. ☐ Si les produits $AB$ et $BA$ sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. ☒ Si les produits $AB$ et $BA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
7. ☒ Si les produits $AB$ et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tA$ est définie.
8. ☐ Si les produits $AB$ et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
9. ☐ Si le produit $AB$ est défini, alors la somme $A\,{}^tA+B\,{}^tB$ est définie.
10. ☒ Si le produit $AB$ est défini, alors la somme ${}^tA\,A+B\,{}^tB$ est définie.

**Vrai-Faux 2.** Soit $A$ une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $A$ est inversible, alors $A\,{}^tA={}^tA\,A$.
2. ☒ Si $A$ est inversible, alors $A\,{}^tA$ est inversible.
3. ☐ Si $A$ est inversible, alors $A+{}^tA$ est inversible.
4. ☒ Si $A$ est inversible, alors $A$ est équivalente à la matrice identité.
5. ☐ Si $A$ est inversible, alors $A$ est semblable à la matrice identité.

**Vrai-Faux 3.** Soit $A$ une matrice carrée. On dit que $A$ est *diagonale* si tous ses coefficients d'ordre $(i,j)$ avec $i\neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $A$ est diagonale, alors $A$ est inversible.
2. ☒ Si $A$ est diagonale, alors $A$ est symétrique.
3. ☒ Si $A$ est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors $A$ est inversible.
4. ☐ Si $A$ est diagonale, alors $A$ est semblable à la matrice identité.
5. ☐ Si $A$ est diagonale, alors $A$ est équivalente à la matrice identité.

**Vrai-Faux 4.** Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si une matrice est de rang $r$, alors elle est équivalente à la matrice $I_r$

2. ☒ Une matrice est de rang $r$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang $r$.
3. ☒ Une matrice est de rang $r$ si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang $r$.
4. ☐ Si une matrice $A$ est de rang $r$, alors toute matrice formée de $r$ colonnes parmi les colonnes de $A$ est de rang $r$.
5. ☒ Si une matrice formée de $r$ colonnes parmi les colonnes de $A$ est de rang $r$, alors $A$ est de rang $\geqslant r$.
6. ☒ La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. ☐ Si deux lignes de $A$ ne sont pas proportionnelles, alors le rang de $A$ est au plus 2.
8. ☐ Si deux lignes de $A$ sont proportionnelles, alors le rang de $A$ est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. ☒ Si une matrice carrée de $\mathcal{M}_r$, extraite de $A$ est inversible, alors $A$ est de rang $\geqslant r$.
10. ☒ Si $A$ est de rang $r$, alors aucune matrice carrée de $\mathcal{M}_{r+1}$ extraite de $A$ n'est inversible.
11. ☐ Si toute matrice carrée de $\mathcal{M}_r$, extraite de $A$ est de rang $r$, alors $A$ est de rang $r$.

## 2.2 Exercices

**Exercice 1.** On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.

2. Etant données deux matrices $A$, $B$ appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits $A\,B$, ${}^t\!A\,B$, $A\,{}^t\!B$, ${}^t\!A\,{}^t\!B$ qui sont définis.

**Exercice 2.** On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $f \circ f(e_1) = f(e_2) = 0$. Montrer que $f \circ f(e_3) = f(e_3)$.
2. En déduire $A^2$. Vérifier en effectuant le produit matriciel.
3. Montrer que $A^3 = A^2$ sans effectuer le produit matriciel, puis vérifier en l'effectuant.
4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$

**Exercice 3.** On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(e_1, e_2, e_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, puis $f \circ f \circ f(e_i)$.
2. En déduire que $A^2 = A^{-1}$. Vérifier en calculant le produit matriciel.

**Exercice 4.** On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(e_1, e_2, e_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, puis $f \circ f \circ f(e_i)$.
2. En déduire $A^2$ et $A^3$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de $k$. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
4. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

**Exercice 5.** On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $(e_1, e_2, e_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $f \circ f(e_i)$, en déduire que $f \circ f = 3f$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer par récurrence que $f^{\circ k} = 3^{k-1} f$.
3. En déduire l'expression de $A^k$ en fonction de $k$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de $k$. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
5. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

**Exercice 6.** On rappelle qu'une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques. On dit qu'une matrice carrée est *antisymétrique* si elle est l'opposée de sa transposée : ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques.

1. Montrer que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$.
3. Soit $A$ une matrice carrée quelconque. Montrer que $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.
4. Montrer que le produit de deux matrices symétriques $A$ et $B$ est symétrique si et seulement si $AB = BA$ (on dit que $A$ et $B$ « commutent »).
5. Montrer que le produit de deux matrices antisymétriques $A$ et $B$ est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
6. Soit $A$ une matrice inversible. Montrer que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.
7. Soit $A$ une matrice symétrique et inversible. Montrer que son inverse est symétrique.
8. Soit $A$ une matrice antisymétrique et inversible. Montrer que son inverse est antisymétrique.
9. Montrer qu'aucune matrice de $\mathcal{A}_3$ n'est inversible.

**Exercice 7.** On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n$.

1. Soient $A, B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.

3. Soit $A$ une matrice carrée non nulle. Montrer que les traces de $A\,{}^tA$ et ${}^tA\,A$ sont strictement positives.

**Exercice 8.** Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 9.** Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.** Pour chacune des matrices $A$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de $\lambda$ le rang de la matrice $A - \lambda I_2$.
2. On note $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les deux réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_2$ est 1. Pour $i = 1, 2$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire
$$(A - \lambda_i I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
On note $v_i$ un vecteur non nul solution de ce système.
3. Montrer que $(v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $(v_1, v_2)$. Calculer $P^{-1}$. Montrer que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$
5. Montrer que la matrice $(A - \lambda_1 I_2)(A - \lambda_2 I_2)$ est nulle. En déduire une expression de $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_2$.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que
$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix} .$$
7. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $A^k$ en fonction de $k$.

**Exercice 11.** Pour chacune des matrices $A$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de $\lambda$ le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. On note $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ les trois réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_3$ est 2. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$(A - \lambda_i I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   On note $v_i$ un vecteur non nul solution de ce système.
3. Montrer que $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(v_1, v_2, v_3)$. Calculer $P^{-1}$. Montrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

5. Montrer que la matrice $(A - \lambda_1 I_3)(A - \lambda_2 I_3)(A - \lambda_3 I_3)$ est nulle. En déduire une expression de $A^{-1}$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix} .$$

7. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $A^k$ en fonction de $k$.

## 2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

**Question 1.** Soient $A$ et $B$ deux matrices.

$\boxed{\text{A}}$ Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit $AB$ est défini.

$\boxed{\text{B}}$ Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit ${}^tAB$ est défini.

C Si le produit $AB$ est défini, alors la somme $A + {}^tB$ est définie.
D Si les produits $AB$ et $BA$ sont définis, alors la somme $A + B$ est définie.
E Si les produits $AB$ et $BA$ sont définis, alors la somme ${}^tA + B$ est définie.

**Question 2.** Soit $A$ une matrice.
A Le produit $AA$ est toujours défini.
B Le produit $A\,{}^tA$ est toujours défini.
C Le produit $(A\,{}^tA)({}^tAA)$ est défini si et seulement si $A$ est carrée.
D Si $A$ est carrée alors $A\,{}^tA = {}^tAA$.
E Si $A\,{}^tA = {}^tAA$ alors $A = {}^tA$.

**Question 3.** Soit $A$ une matrice carrée, et $I$ la matrice identité, de même taille que $A$.
A Si $A$ est inversible, alors $A\,{}^tA$ est inversible.
B Si $A$ est inversible, alors $I - A$ est inversible.
C Si $A$ est inversible, alors $A + {}^tA$ est inversible.
D Si $A$ est inversible, alors $(A^{-1}\,{}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}\,A$.
E Si $A$ est inversible, alors $(A\,{}^tA)(A^{-1}\,{}^tA^{-1}) = I$.

**Question 4.** On considère la matrice $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A$.
A L'application $f$ est injective.
B L'application $f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$.
C L'application $f \circ f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
D La matrice $A$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
E La matrice $A$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Question 5.** On considère la matrice $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $A$.

- [A] L'application $f$ est surjective.
- [B] Le noyau de $f$ est un plan vectoriel.
- [C] La matrice $A$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- [D] La matrice $A$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- [E] La matrice $A$ est de rang 2.

**Question 6.** Soit $A$ une matrice.

- [A] Le rang de $A^tA$ est toujours supérieur ou égal au rang de $A$
- [B] Le rang de ${}^tA$ est toujours égal au rang de $A$.
- [C] Le rang de ${}^tAA$ est toujours inférieur ou égal au rang de $A$.
- [D] Si $A$ a plus de lignes que de colonnes, alors le rang de $A$ est égal à son nombre de colonnes.
- [E] Si le rang de $A$ est égal à son nombre de colonnes, alors $A$ est inversible.

**Question 7.** Soit $A$ une matrice à 4 lignes, 3 colonnes, de rang 2.

- [A] $A$ est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$.
- [B] $A$ est la matrice d'une application linéaire dont le noyau est un plan vectoriel.
- [C] $A$ est la matrice d'une application linéaire dont l'image est un plan vectoriel.
- [D] $A$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- [E] $A$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Question 8.** Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée inversible. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique.

- [A] $A$ est semblable à la matrice identité de même taille que $A$.
- [B] Le noyau de $f$ est une droite vectorielle.
- [C] $A$ est équivalente à la matrice identité de même taille que $A$.
- [D] L'image de $f$ est $\mathbb{R}^n$.
- [E] Le système linéaire $Ax = 0$ admet une solution non nulle.

**Question 9.** On considère la matrice $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $I$ la matrice identité à deux lignes et deux colonnes.

$\boxed{\text{A}}$ L'inverse de $A$ est égal à $A$.

$\boxed{\text{B}}$ La matrice $A$ est semblable à $I$.

$\boxed{\text{C}}$ L'inverse de $A$ a des coefficients non entiers.

$\boxed{\text{D}}$ La matrice $\frac{1}{2}(A + A^{-1})$ est égale à $I$.

$\boxed{\text{E}}$ La matrice $A + A^{-1}$ est diagonale.

**Question 10.** On considère la matrice $A$ suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit $I$ la matrice identité à trois lignes et trois colonnes.

$\boxed{\text{A}}$ $A - I$ est inversible.

$\boxed{\text{B}}$ $A^2 = A$.

$\boxed{\text{C}}$ $A^{-1} = {}^tA$.

$\boxed{\text{D}}$ $A + A^2$ est de rang 2.

$\boxed{\text{E}}$ $I + A + A^2$ est de rang 1.

Réponses : 1–DE 2–BC 3–AD 4–BD 5–BD 6–BC 7–CD 8–CD 9–DE 10–CE

## 2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

---

**Questions de cours :** Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée. On note $I$ la matrice identité de dimension $n$. On suppose qu'il existe une matrice $B$ telle que $A\,B = I$.

1. Soit $f$ l'application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{M}_n$ qui à une matrice $X$ associe le produit $XA$. Montrer que $f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f$ est injective. En déduire que $f$ est bijective.
3. Montrer qu'il existe une matrice $B_* \in \mathcal{M}_n$ telle que $B_*\,A = I$. Montrer que $B_* = B$. En déduire que $A$ est inversible.
4. Soit $B^*$ une matrice telle que $A\,B^* = I$. Montrer que $B^* = B$.
5. Soit $C \in \mathcal{M}_n$ une autre matrice inversible. Montrer que le produit $A\,C$ est inversible et que $(A\,C)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

---

**Exercice 1 :** Soient $A$ et $B$ les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Vérifier que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.
2. Vérifier que $B$ est inversible et calculer $B^{-1}$.
3. On pose $M = AB$. Justifier le fait que $M$ est inversible et calculer $M^{-1}$, en utilisant les résultats des deux questions précédentes.

   *Dans toute la suite, $(b_1, b_2, b_3)$ désigne une base de $\mathbb{R}^3$. On note $f$ (respectivement : $g$) l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui a pour matrice $A$ (respectivement : $B$) dans la base $(b_1, b_2, b_3)$.*

4. Exprimer en fonction de $b_1, b_2, b_3$ les vecteurs $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$, puis $f \circ f(b_1), f \circ f(b_2), f \circ f(b_3)$. Retrouver le résultat de la question 1.
5. Exprimer les vecteurs $g^{-1}(b_1), g^{-1}(b_2), g^{-1}(b_3)$ en fonction de $b_1, b_2, b_3$.
6. On note $h$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, qui à un vecteur $v$ associe $h(v) = f(v) - g^{-1}(v)$. Ecrire la matrice de $h$ dans la base $(b_1, b_2, b_3)$.
7. Donner, en fonction de $b_1, b_2, b_3$, une base de $\mathrm{Ker}(h)$ et une base de $\mathrm{Im}(h)$.
8. On note $c_1 = f(b_1)$, $c_2 = f(b_2)$, $c_3 = f(b_3)$. Montrer que $(c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de l'application $f$ dans la base $(c_1, c_2, c_3)$ ?
9. Calculer les matrices des applications $g$ et $g^{-1}$ dans la base $(c_1, c_2, c_3)$.

---

**Exercice 2 :** Soient $A$ et $B$ les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

On note $f$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ qui a pour matrice $A$ relativement aux bases canoniques, et $g$ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $B$ relativement aux bases canoniques.

1. Calculer les produits $AB$ et $BA$.
2. On note $P$ la matrice constituée des trois premières lignes de la matrice $A$. Vérifier que $P$ est inversible et calculer son inverse. En déduire le rang de la matrice $A$.
3. Déterminer le rang de $B$. En déduire le rang des matrices $AB$ et $BA$.
4. On note $(b_1, b_2, b_3)$ les trois vecteurs colonnes de la matrice $A$. Soit $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ le quatrième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Justifier le fait que $(b_1, b_2, b_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Donner la matrice de l'application $f$, relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à la base $(b_1, b_2, b_3, e_4)$ à l'arrivée.
6. Calculer la matrice de l'application $f \circ g$ dans la base $(b_1, b_2, b_3, e_4)$.

---

## 2.5 Corrigé du devoir

**Questions de cours :**

1. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n$ deux matrices, $\lambda, \mu$ deux réels.

$$(\lambda X + \mu Y)\, A = \lambda X A + \mu Y A\ ,$$

car le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition. Donc l'application $f$ est linéaire.

2. Pour montrer qu'une application linéaire est injective, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit $X$ un élément du noyau de $f$, c'est-à-dire une matrice telle que $XA = 0$ (matrice nulle). En multipliant à droite par $B$, et en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$(XA)\, B = X(A\, B) = X\, I = X\ .$$

Or si $XA = 0$, alors $(XA)\, B = 0$, donc $X = 0$. Donc le noyau de $f$ ne contient que la matrice nulle : $f$ est injective.

Une application linéaire entre deux espaces de même dimension, si elle est injective, est aussi surjective, donc bijective.

3. Puisque $f$ est surjective, il existe $B_* \in \mathcal{M}_n$ telle que $f(B_*) = I$, soit $B_* A = I$.

Pour montrer que $B_* = B$, on utilise encore l'associativité du produit matriciel : $B_*\,(A\, B) = (B_* A)\, B$. Or :

$$B_*\,(A\, B) = B_*\, I = B_* \quad \text{et} \quad (B_*\, A)\, B = I\, B = B\ .$$

Par définition, s'il existe une matrice $B$ telle que $B\, A = A\, B = I$, la matrice $A$ est inversible.

4. La démonstration est la même que précédemment : $B\,(A\, B^*) = (B\, A)\, B^*$. Or :

$$B\,(A\, B^*) = B\, I = B \quad \text{et} \quad (B\, A)\, B^* = I\, B^* = B^*\ .$$

5. Utilisons encore l'associativité du produit matriciel.

$$(A\, C)\,(C^{-1}A^{-1}) = A\,(CC^{-1})\, A^{-1} = A\, I\, A^{-1} = A\, A^{-1} = I\ .$$

Il existe donc une matrice qui, multipliée à droite par $A\, C$ donne l'identité. Par application de ce qui précède, la matrice $A\, C$ est donc inversible et son inverse est la matrice $C^{-1}A^{-1}$.

**Exercice 1 :**

1. La matrice $A$ est triangulaire et ses termes diagonaux sont non nuls : elle est de rang 3, donc inversible. On trouve $A^{-1} = A$.

2. La matrice $B$ est triangulaire et ses termes diagonaux sont non nuls : elle est de rang 3, donc inversible. On trouve :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Le produit de deux matrices inversibles est inversible.

$$M^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

4. 
$$f(b_1) = b_1 + b_3 \;, \quad f(b_2) = b_2 + b_3 \;, \quad f(b_3) = -b_3 \;.$$
$$\begin{array}{rclcl} f \circ f(b_1) & = & f(b_1) + f(b_3) & = & b_1 \\ f \circ f(b_2) & = & f(b_2) + f(b_3) & = & b_2 \\ f \circ f(b_3) & = & f(-b_3) & = & b_3 \;. \end{array}$$

   L'application $f \circ f$ coïncide avec l'application identique sur une base de $\mathbb{R}^3$, donc sur $\mathbb{R}^3$ tout entier. Donc $f$ est sa propre réciproque, donc $A^{-1} = A$.

5. La matrice de l'application $g^{-1}$ dans la base $(b_1, b_2, b_3)$ est $B^{-1}$. On en déduit :

$$g^{-1}(b_1) = b_1 \;, \quad g^{-1}(b_2) = b_2 \;, \quad g^{-1}(b_3) = -b_1 - b_2 + b_3 \;.$$

6. La matrice de $h$ dans la base $(b_1, b_2, b_3)$ est $A - B^{-1}$.

$$A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

7. Soit $(x, y, z)$ les coordonnées dans la base $(b_1, b_2, b_3)$ d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(h)$,

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} & & z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ x & +y & -2z & = & 0 \;. \end{array} \right.$$

   Tout vecteur de $\mathrm{Ker}(h)$ s'écrit $xb_1 - xb_2$, où $x$ est un réel quelconque. Donc $\mathrm{Ker}(h)$ est une droite vectorielle, dont une base est le vecteur $b_1 - b_2$. L'image de $f$ est un plan vectoriel, dont une base est donnée par le premier et le troisième vecteur colonne de la matrice : $(b_3, b_1 + b_2 - 2b_3)$.

8. Puisque $A$ est inversible, l'image par $f$ d'une base est une base. Donc $(c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. D'après la question 4,

$$f(c_1) = b_1 = c_1 + c_3 \;, \quad f(c_2) = b_2 = c_2 + c_3 \;, \quad f(c_3) = b_3 = -c_3 \;.$$

Donc dans la base $(c_1, c_2, c_3)$, la matrice de $f$ est encore la matrice $A$. On peut aussi le montrer en utilisant la formule de changement de base : $P^{-1}AP$, où $P$ est la matrice de passage de l'ancienne base $(b_1, b_2, b_3)$ à la nouvelle $(c_1, c_2, c_3)$, qui ici vaut $A$.

9. En utilisant la formule de changement de base, la matrice de $g$ dans la base $(c_1, c_2, c_3)$ est :

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

La matrice de $g^{-1}$ dans la base $(c_1, c_2, c_3)$ est l'inverse de la précédente :

$$A^{-1}B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

---

**Exercice 2 :**

1. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -5 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} .$$

2. En résolvant le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on trouve que ce système est de rang 3, donc la matrice $P$ est bien inversible. Son inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Les trois vecteurs colonnes de $P$ sont linéairement indépendants, donc les trois premiers vecteurs colonnes de $A$ le sont aussi : la matrice $A$ est de rang 3.

3. Les deux premières lignes de $B$ sont linéairement indépendantes. La troisième est la somme des deux autres. Donc la matrice $B$ est de rang 2.

La matrice $AB$ est celle de l'application composée $f \circ g$. Puisque $B$ est de rang 2, l'image de $g$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Puisque l'application $f$ est de rang 3, son noyau est réduit à $\{0\}$ et sa restriction à $\mathrm{Im}(g)$ est de rang 2. Donc l'image de $f \circ g$ est un plan vectoriel : $AB$ est de rang 2.

Le raisonnement est analogue pour $BA$ : c'est la matrice de l'application $g \circ f$. Puisque $f$ est de rang 3, son image est $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$. Donc $g \circ f$ est de rang 2, comme $g$. Donc la matrice $BA$ est de rang 2.

4. Soit $Q$ la matrice formée en juxtaposant la matrice $A$ et le vecteur colonne $e_4$. Voici $Q$ et sa transposée.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\!Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Notons $l_1, l_2, l_3, l_4$ les 4 vecteurs lignes de $Q$ (vecteurs colonnes de ${}^t\!Q$). Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 4 réels tels que $\alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma l_3 + \delta l_4 = 0$. Nécessairement, $\delta = 0$, donc $\alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma l_3 = 0$. Mais les vecteurs $l_1, l_2, l_3$ sont linéairement indépendants, d'après la question 2, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La matrice ${}^t\!Q$ est donc de rang 4, et il en est de même pour $Q$. Donc $(b_1, b_2, b_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Par définition, les images par $f$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $b_1, b_2, b_3$. Donc la matrice de l'application $f$, relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à la base $(b_1, b_2, b_3, e_4)$ à l'arrivée est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Par application de la formule de changement de variable, la matrice de l'application $f \circ g$ dans la base $(b_1, b_2, b_3, e_4)$ est $Q^{-1}AB\,Q$. Or la matrice de la question précédente est $Q^{-1}A$, ce qui simplifie le calcul : la matrice $Q^{-1}AB$ est la matrice carrée obtenue en ajoutant à $B$ une quatrième ligne de zéros. Il reste à calculer le produit par $Q$ :

$$Q^{-1}ABQ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

# 3 Compléments

## 3.1 Les avocats de Cambridge

Tous deux ont fait leurs études à Cambridge, tous deux ont exercé assez longuement comme avocats tout en considérant cela comme un moyen accessoire de gagner leur vie, tous deux ont fini professeurs de mathématiques. Ils étaient amis, et se sont influencés l'un l'autre par leurs travaux respectifs, même s'il n'ont cosigné aucun article [1]. Nous parlons de Arthur Cayley (1821–1895) et de James Joseph Sylvester (1814–1897). Voici ce que disait le second, vers la fin de sa carrière.

> Cayley, who, though younger than myself is my spiritual progenitor – who first opened my eyes and purged them of dross so that they could see and accept the higher mysteries of our common mathematical faith…

Sylvester est le premier qui a employé le mot « matrix » en 1850. L'année suivante, il explicite l'analogie qui l'a conduit à ce terme.

> I have in a previous paper defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent.

Au début, une matrice n'était donc qu'un tableau à partir duquel étaient engendrés des déterminants. C'est Cayley qui a le premier en 1858 traité les matrices comme de nouveaux objets mathématiques, susceptibles d'être ajoutés et multipliés. Lisez le début de « A memoir on the Theory of Matrices », et admirez l'élégance et la concision du style (les notations ont légèrement changé).

> The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matric ; in this restricted sense, a set of quantities arrranged in the form of a square, *e. g.*
>
> $$\left( \begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c\,, \\ a'\,, & b'\,, & c'\,, \\ a''\,, & b'' & c''\,, \end{array} \right)$$
>
> is said to be a matrix.
>
> [...]
>
> It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities ; they may be added, multiplied or compounded together, &c. : the law of addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ardinary algebraix quantities ; as regards their multiplication (or composition), there is the peculiarity that matrices are not in general convertible ; it is nevertheless possible to form the powers

1. N.J. Higham : Cayley, Sylvester and early matrix theory *Lin. Alg. Appl. 428 p. 39–43 (2008)*

(positive or negative, integral or fractional) of a matrix, and thence to arrrive at the notion of a rational and intergal function, or generally os any algebraical function, of a matrix.

Le style de Sylvester était moins dépouillé que celui de Cayley. Ils se rejoignaient pourtant dans leurs opinions esthétiques.

Cayley : « As for everything else, so for a mathematical theory : beauty can be perceived but not explained.

Sylvester : « May not music be described as the mathematics of the sense, mathematics as music of the reason ? The musician feels mathematics, the mathematician thinks music : music the dream, mathematics the working life.

## 3.2 Diagonalisation

Voici deux systèmes linéaires d'équations.

$$(a)\left\{\begin{array}{rrrcr} & y & +z & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ \frac{3}{2}x & -\frac{3}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 0 \\ & -y & & = & -1 \\ & & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations de récurrence.

$$(a)\left\{\begin{array}{lcrrr} u_{k+1} & = & & v_k & +w_k \\ v_{k+1} & = & -\frac{1}{2}u_k & +\frac{3}{2}v_k & -\frac{1}{2}w_k \\ w_{k+1} & = & \frac{3}{2}u_k & -\frac{3}{2}v_k & +\frac{1}{2}w_k \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{lcrrr} u_{k+1} & = & u_k & & \\ v_{k+1} & = & & -v_k & \\ w_{k+1} & = & & & 2w_k \end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations différentielles.

$$(a)\left\{\begin{array}{lcrrr} x'(t) & = & & y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{lcrrr} x'(t) & = & x(t) & & \\ y'(t) & = & & -y(t) & \\ z'(t) & = & & & 2z(t) \end{array}\right.$$

Les trois problèmes, de natures très différentes, ont en commun leur écriture matricielle, avec les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tous les problèmes linéaires sont plus faciles à résoudre quand la matrice est diagonale !

Il se trouve que les deux matrices $A$ et $D$ sont *semblables*, c'est-à-dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, ou encore, il existe une *matrice de passage* $P$ telle que $P^{-1}AP = D$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

**Définition 8.** *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est* diagonalisable *si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice de passage $P$ telle que*

$$P^{-1}AP = D\,.$$

Les techniques permettant de savoir si une matrice donnée est diagonalisable et de calculer la matrice de passage $P$ si elle l'est, dépassent le cadre de ce cours. On commence par calculer les coefficients diagonaux de $D$, qui sont les valeurs de $\lambda$ telles que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible : on les appelle les *valeurs propres*, et leur ensemble est le *spectre* de la matrice. Pour chaque valeur propre $\lambda$, on détermine ensuite le *sous-espace propre* associé à $\lambda$ : c'est l'ensemble des vecteurs $v$ tels que $(A - \lambda I_n)v = 0$. La matrice est diagonalisable lorsqu'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs appartenant aux sous-espaces propres. La matrice de passage $P$ est la matrice exprimant ces vecteurs dans la base canonique. Quelques exemples élémentaires sont donnés dans les exercices 10 et 11.

Quand une matrice $A$ est diagonalisable, il est facile de résoudre le système linéaire $Ax = b$ : il est équivalent au système $Dy = c$, avec $y = P^{-1}x$ et $c = P^{-1}b$. Or dans un système dont la matrice est diagonale, toutes les équations n'ont qu'une inconnue et se résolvent séparément.

Prenons maintenant l'exemple d'un système d'équations de récurrence linéaire, du type $U_{k+1} = A\,U_k$, où $U_k$ désigne un vecteur dont on souhaite connaître l'expression en fonction de $k$. Du point de vue théorique, il n'y a pas de problème :

$$U_k = A^k\,U_0\,.$$

Mais cela n'avance à rien si on ne sait pas calculer formellement l'expression de $A^k$ en fonction de $k$. C'est possible si $A$ est diagonalisable. En effet, si $A = PDP^{-1}$ :

$$A^k = PDP^{-1}\,PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}\,.$$

Ecrire $D^k$ est immédiat. On en déduit l'expression générale de $A^k$, donc de $U_k$. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} & \frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{2^k}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{(-1)^k}{2} + \frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2} - \frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2} + \frac{2^k}{2} \end{pmatrix}$$

Passons maintenant aux systèmes d'équations différentielles, du type

$$Y'(t) = A\,Y(t)\ , \tag{1}$$

où $Y$ est une fonction (inconnue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, et $A \in \mathcal{M}_n$ est une matrice carrée de réels. Si $A = PDP^{-1}$, alors

$$P^{-1}Y'(t) = D(P^{-1}Y(t)$$

Donc $X(t) = P^{-1}Y(t)$ est solution du système $X'(t) = DX(t)$. En posant $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, ce système s'écrit

$$\forall i = 1, \ldots, n\ , \quad x_i'(t) = \lambda_i\, x_i(t)\ .$$

Sa solution est facile à calculer :

$$\forall i = 1, \ldots, n\ , \quad x_i(t) = e^{\lambda_i t}\, x_i(0)\ .$$

Le vecteur des conditions initiales pour le système diagonalisé est $X(0) = P^{-1}Y(0)$. Connaissant $X(t)$, on en déduit $Y(t) = PX(t)$.

Soit par exemple à résoudre

$$\left\{\begin{array}{rclrrr} x'(t) & = & & y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array}\right. ,$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$. Le système s'écrit sous la forme $Y'(t) = A\,Y(t)$, avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\ .$$

En utilisant la diagonalisation de $A$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{3}{2}e^{-t} \\ y(t) & = & \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{1}{2}e^{2t} \\ z(t) & = & \dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{array}\right.$$

Présentée ainsi la diagonalisation semble un outil magique. En réalité, les algorithmes qui calculent numériquement les valeurs propres et les vecteurs propres sont relativement lents et il est impossible de diagonaliser une matrice si sa dimension dépasse quelques dizaines.

## 3.3 Décomposition LU

La méthode du pivot de Gauss n'est pas exactement programmée comme elle a été présentée. Il y a plusieurs raisons à cela, dont la principale est le problème de la précision numérique.

Voici un système de deux équations à deux inconnues, dépendant du paramètre $\varepsilon \neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon x + y & = & 1 \\ x + y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon x + y & = & 1 \\ (1-\frac{1}{\varepsilon})y & = & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{\varepsilon}(1-(2-\frac{1}{\varepsilon})/(1-\frac{1}{\varepsilon})) \\ y & = & (2-\frac{1}{\varepsilon})/(1-\frac{1}{\varepsilon}) \end{array}\right.$$

Voici le même système, après avoir échangé les deux équations.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ \varepsilon x + y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ (1-\varepsilon)y & = & 1-2\varepsilon \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2-(1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \\ y & = & (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \end{array}\right.$$

Les deux solutions sont évidemment les mêmes. Pourtant, si $\varepsilon$ est très petit en valeur absolue, les deux calculs ne sont pas du tout équivalents numériquement : diviser par un petit nombre, ou multiplier par un grand nombre, augmente les erreurs d'approximation.

Telles que nous les avons présentées, les permutations de lignes et de colonnes servent à assurer que les pivots restent non nuls. La plupart des systèmes que l'on rencontre en pratique ont une solution unique : ce sont des systèmes de $n$ équations à $n$ inconnues, de rang $n$. En général, on peut leur appliquer la méthode du pivot de Gauss sans rencontrer de pivot nul. Mais on utilise quand même les permutations de lignes et de colonnes, pour faire en sorte qu'à chaque étape, le pivot soit le plus grand possible en valeur absolue.

Permuter les *lignes* d'une matrice, revient à la multiplier *à gauche* par une matrice de permutation. Une matrice de permutation est la matrice de passage de la base

$(b_1, \ldots, b_n)$ à la base $(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$, où $\sigma$ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. Ses coefficients d'ordre $(\sigma(i), i)$ valent 1, les autres 0. Permuter les *colonnes* d'une matrice, revient à la multiplier *à droite* par une autre matrice de permutation. En permutant les lignes et les colonnes, on remplace la matrice $A$ par la matrice $P_1AP_2$ où $P_1$ et $P_2$ sont deux matrices de permutation.

Dans sa version la plus courante, l'algorithme ne considère que des permutations de lignes : il remplace donc la matrice $A$ par $PA$, où $P$ est une matrice de permutation. Une fois choisi l'ordre dans lequel on traite les lignes, la $i$-ième étape de la méthode consiste à ajouter aux lignes d'indice $i+1, i+2, \ldots, n$ la $i$-ième ligne multipliée par un certain coefficient. Cela revient à multiplier à gauche par une matrice du type suivant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_{m,i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces matrices, pour $i$ allant de 1 à $m$ est la matrice ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ \lambda_{m,1} & \cdots & \lambda_{m,i} & \cdots & \lambda_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est encore une matrice du même type : trianglaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On la note $L$ (pour « lower triangular »). Le produit $L^{-1}PA$ est une matrice triangulaire supérieure, que l'on note $U$ pour « upper triangular » : $U$ est la *forme échelonnée* de $A$.

$$L^{-1}PA = U \iff PA = LU \;.$$

La décomposition LU de la matrice $A$ est la donnée des trois matrices $P, L, U$ telles que $PA = LU$.

Si on doit résoudre le système $Ax = b$, on le transformera en deux systèmes triangulaires, un de matrice $L$, l'autre de matrice $U$.

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff \left\{ \begin{array}{l} Ly = Pb \\ \\ Ux = y \end{array} \right.$$

Il arrive fréquemment que l'on ait à résoudre successivement de nombreux systèmes linaires ayant tous la même matrice $A$, mais des seconds membres différents. Calculer au préalable la décomposition LU de $A$ réduit de beaucoup le temps de calcul. Pour certaines matrices qui reviennent souvent dans les calculs, la décomposition LU figure dans les bibliothèques de codes, et elle est chargée en mémoire avant le début du calcul.