

Convergence uniforme

Vous allez apprendre à traiter les nombreuses situations où des limites s'enchaînent sur une variable et sur un paramètre, entier ou non. Vous devrez retenir d'une part la prudence (on n'intervertit pas des limites sans précaution), d'autre part que dans la plupart des cas, la convergence uniforme rend vrai ce qu'il est naturel d'écrire. Ne vous lancez pas sans de solides bases d'analyse : révisez les chapitres sur les suites et les séries numériques, limites et continuité, dérivabilité, intégration.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Interversion de limites	1
1.2	Suites de fonctions	5
1.3	Continuité uniforme	9
1.4	Séries de fonctions	15
1.5	Fonction définie par une intégrale	18
1.6	Intégrales convergentes	21
2	Entraînement	24
2.1	Vrai ou faux	24
2.2	Exercices	30
2.3	QCM	38
2.4	Devoir	40
2.5	Corrigé du devoir	43
3	Compléments	50
3.1	Like a rolling stone	50
3.2	Tout le monde peut se tromper	51
3.3	La paille dans l'oeil du voisin	53
3.4	Dépouillé d'une gloire	56
3.5	Une démonstration du théorème de d'Alembert	58
3.6	Polynômes de Bernstein	62

1 Cours

1.1 Intersion de limites

La liste d'exemples qui suit a pour but de vous montrer la diversité des situations que nous envisageons dans ce chapitre, mais aussi de vous inciter à la prudence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = +\infty \quad \text{mais} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = 0.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ae^{-x} = 0 \quad \text{mais} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} ae^{-x} = +\infty.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \quad \text{mais} \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^n = 1 \quad \text{mais} \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = 0 \quad \text{mais} \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

Pour les exemples qui suivent, $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un sous ensemble A de $\mathbb{R}$: $\mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{I}_{[n, +\infty[}(x) = 1 \quad \text{mais} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{I}_{[n, +\infty[}(x) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}[}(x) = 1 \quad \text{mais} \quad \forall x \in]0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}[}(x) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 n \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) dx = 1 \quad \text{mais} \quad \forall x \in [0, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) = 0.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{[a, +\infty[}(x) dx = +\infty \quad \text{mais} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathbb{I}_{[a, +\infty[}(x) = 0.$$

Dans toutes ces situations, deux calculs de limites portant successivement sur chacune des variables ne donnent pas le même résultat si les variables sont échangées : on ne peut pas *intervertir* les deux limites. La *convergence uniforme* est une condition suffisante sous laquelle l'intersion de deux limites est possible. Nous commençons par le cas le plus simple, celui d'une « double » suite.

Théorème 1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(u_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes, qui converge vers a_m , uniformément en m :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m \in \mathbb{N}, \quad |u_{n,m} - a_m| < \varepsilon.$$

Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{m,n})_{m \in \mathbb{N}}$ converge, et soit b_n sa limite. Alors les deux suites $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{m,n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Pour bien comprendre l'adverbe « uniformément », comparez avec « pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a_m » :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |u_{n,m} - a_m| < \varepsilon.$$

Le rang n_0 dépend non seulement de ε , mais aussi de m . La convergence est *uniforme en m* , si ce rang n_0 vaut pour tous les m . Remarquez que l'hypothèse d'uniformité implique la convergence des deux suites (a_m) et (b_n) .

Démonstration : Dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{C}$, une suite est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ici les suites $(u_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy *uniformément en m* . Commençons par le démontrer. Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{m,n+k} - u_{m,n}| \leq |u_{m,n+k} - a_m| + |a_m - u_{m,n}|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout m ,

$$|u_{m,n+k} - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_{m,n} - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout m ,

$$|u_{m,n+k} - u_{m,n}| < \varepsilon$$

Dans cette inégalité, prenons la limite en m : pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$:

$$|b_{n+k} - b_n| \leq \varepsilon.$$

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge. Soit l sa limite. Nous devons montrer que la suite $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi vers l .

$$|a_m - l| \leq |a_m - u_{m,n}| + |u_{m,n} - b_n| + |b_n - l|.$$

Il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|b_n - l| < \varepsilon/3$. Il existe n_1 tel que pour tout $n > n_1$ et pour tout m , $|a_m - u_{m,n}| < \varepsilon/3$. Fixons alors $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$. La suite (u_{m,n_2}) converge vers b_{n_2} , donc il existe m_0 tel que pour tout $m > m_0$, $|u_{m,n_2} - b_{n_2}| < \varepsilon/3$. Au bilan, pour tout $m > m_0$:

$$|a_m - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Le théorème 1 est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général qui vaut pour n'importe quel cas de limites enchaînées : suites, mais aussi fonctions, limites à gauche, à droite, en $\pm\infty$, etc. Tant que vous ne disposez pas d'une notion de limite suffisamment générale, vous en êtes réduit à récrire autant de définitions et de théorèmes qu'il y a de situations (apparemment) différentes. Nous allons le faire pour une suite de fonctions, avec une limite finie en un point.

Théorème 2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto f_n(x)$ une fonction définie sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, uniformément en x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Soit a un point de I . Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite en a , notée l_n .

Alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, f admet une limite en a et les deux limites sont les mêmes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

Bien sûr, nous pourrions invoquer le fait qu'une fonction f admet l pour limite en a si et seulement, pour toute suite x_n convergeant vers a , la suite $f(x_n)$ converge vers l . Nous serions ramenés à la situation précédente, et nous déduirions le théorème 2 du théorème 1. Mais la question est suffisamment difficile, l'enjeu important et les notations compliquées, pour justifier une nouvelle démonstration que nous vous invitons à suivre en parallèle de la précédente.

Démonstration : Commençons par démontrer que la suite l_n est de Cauchy. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$,

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+k}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout $x \in I$,

$$|f_{n+k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout $x \in I$,

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Dans cette inégalité, prenons la limite quand x tend vers a : pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$:

$$|l_{n+k} - l_n| \leq \varepsilon.$$

La suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge. Soit l sa limite. Nous devons montrer que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a .

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|.$$

Il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|l_n - l| < \varepsilon/3$. Il existe n_1 tel que pour tout $n > n_1$ et pour tout $x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Fixons alors $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$. La

fonction $f_{n_2}(x)$ converge vers l_{n_2} , donc il existe η tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, $|f_{n_2}(x) - l_{n_2}| < \varepsilon/3$. Au bilan, pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$:

$$|f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

□

Pour être sûr que vous avez bien compris, et au risque de paraître lourd :

Théorème 3. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, a un point de I et b un point de J . Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que pour tout $x \in I$, l'application partielle $y \mapsto f(x, y)$ admet $g(x)$ comme limite en b , uniformément en x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]b - \eta, b + \eta[, \forall x \in I, |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon .$$

Soit a un point de I . Supposons que pour tout $y \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x, y)$ admet une limite en a , notée $h(y)$.

Alors h admet une limite en b , g admet une limite en a et les deux limites sont les mêmes.

$$\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$$

Comme vous ne connaissez pas encore le critère de Cauchy généralisé, nous allons devoir passer par les suites pour l'une des deux variables, ce qui va rendre cette démonstration très proche de la précédente.

Démonstration : Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers b : la suite $f(x, y_n)$ converge vers $g(x)$, uniformément en x . Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$,

$$|f(x, y_{n+k}) - f(x, y_n)| \leq |f(x, y_{n+k}) - g(x)| + |g(x) - f(x, y_n)|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout $x \in I$,

$$|f(x, y_{n+k}) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x, y_n) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$, et pour tout $x \in I$,

$$|f(x, y_{n+k}) - f(x, y_n)| < \varepsilon$$

Dans cette inégalité, prenons la limite quand x tend vers a : pour tout $n > n_0$, pour tout $k \geq 0$:

$$|h(y_{n+k}) - h(y_n)| \leq \varepsilon .$$

La suite $(h(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge. Soit l sa limite. Nous devons montrer que $g(x)$ tend vers l quand x tend vers a .

$$|g(x) - l| \leq |g(x) - f(x, y_n)| + |f(x, y_n) - h(y_n)| + |h(y_n) - l| .$$

Il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|h(y_n) - l| < \varepsilon/3$. Il existe n_1 tel que pour tout $n > n_1$ et pour tout $x \in I$, $|g(x) - f(x, y_n)| < \varepsilon/3$. Fixons alors $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$. La fonction $f(x, y_{n_2})$ converge vers $h(y_{n_2})$, donc il existe η tel que pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, $|f(x, y_{n_2}) - h(y_{n_2})| < \varepsilon/3$. Au bilan, pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$:

$$|g(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

A priori, nous avons choisi une suite particulière (y_n) , mais le fait que la limite de $(h(y_n))$ soit aussi la limite en a de g prouve que cette limite ne dépend pas de la suite choisie. $\square$

Vous voilà armés pour comprendre les hypothèses de convergence uniforme et les interversions de limite que vous allez rencontrer dans tout le reste du chapitre. Vous avez encore un doute ? Il y a 5 types de limites pour une fonction (en un point, à gauche, à droite, en $\pm\infty$). Prenez deux types de limite, écrivez qu'une convergence est uniforme par rapport à l'autre variable, puis démontrez l'interversion. Par exemple : si $f(x, y)$ est une fonction de deux variables, écrivez l'hypothèse de convergence uniforme adéquate, puis démontrez en utilisant votre hypothèse que

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) \right)$$

Vous aurez compris bien avant la fin des 25 exercices !

1.2 Suites de fonctions

Nous commençons par expliciter à nouveau l'hypothèse de convergence uniforme dans le cas d'une suite de fonctions.

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

2. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

La convergence uniforme est naturellement associée à la *norme uniforme*.

Définition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I . On appelle norme uniforme de f sur I , et on note $\|f\|_\infty$ la quantité

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in I\} .$$

Rappelons que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie, et que par convention la borne supérieure d'une partie non majorée est $+\infty$. Vous apprendrez plus tard que les normes servent à évaluer les distances dans les espaces vectoriels, et vous saurez pourquoi celle-ci, parmi toutes les normes possibles dans les espaces vectoriels de fonctions, est affublée d'un indice ∞ . Pour l'instant, elle va nous permettre de rendre la convergence uniforme un peu plus lisible.

Proposition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Démonstration : Reprenons la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Cette définition dit qu'à partir de n_0 , ε est un majorant de $\{|f_n(x) - f(x)|, x \in I\}$, ce qui entraîne que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ (la borne supérieure est le plus petit des majorants). Donc $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty$ tend vers 0.

Réciproquement, si $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty$ tend vers 0, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in I\} < \varepsilon$, donc pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $\square$

La figure 1 donne un support géométrique à votre intuition. Si (f_n) converge uniformément vers f , alors pour n assez grand, le graphe de f_n reste dans un « tube » de largeur constante ε autour du graphe de f . La proposition 1 fournit un moyen de

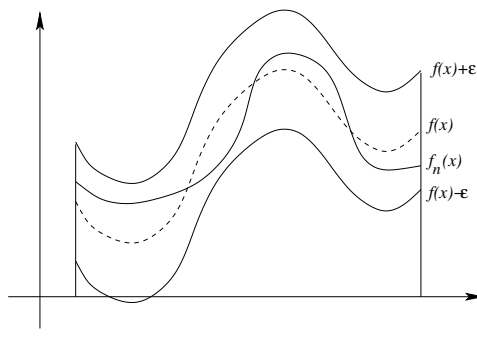


FIGURE 1 – Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

démontrer qu'une convergence est uniforme : il suffit de trouver un majorant α_n de l'ensemble $\{|f_n(x) - f(x)|, x \in I\}$, puis de montrer que α_n tend vers 0. Réciproquement, pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme, recherchez le maximum de $|f_n(x) - f(x)|$: s'il ne tend pas vers 0, la convergence n'est pas uniforme. Par exemple $f_n : x \mapsto \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$ converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme car le maximum de f_n est 1.

Avant d'étudier les conséquences de la convergence uniforme, insistons à nouveau sur le fait que la limite *simple* d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement une fonction continue. Nous avons déjà donné l'exemple de $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$, en voici un autre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = (1 + x^{2n})^{-1}$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Si la convergence d'une suite de fonctions continues est *uniforme*, la limite est bien continue.

Théorème 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f , alors f est continue sur I .

Démonstration : Pour tout $a \in I$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a) ,$$

car f_n est continue en a . Comme la convergence est uniforme, le théorème 2 donne :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a) .$$

□

Il s'agit bien d'une condition *suffisante* : une limite non uniforme de fonctions continues peut très bien être continue : par exemple $f_n : x \mapsto \mathbb{I}_{]0, \frac{1}{n}]}(x)$ converge (simplement) vers la fonction nulle. Il en est d'ailleurs de même de nf_n . Or l'intégrale de nf_n sur $[0, 1]$ vaut 1 : l'intégrale de la limite simple d'une suite de fonctions n'est pas forcément l'intégrale de la limite. Là encore, la convergence uniforme est la bonne hypothèse.

Théorème 5. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f , alors la suite des primitives (F_n) définies sur $[a, b]$ par

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt ,$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction qui à x associe

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt .$$

Démonstration : La fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue (théorème 4). En tant que fonction continue, elle est intégrable sur $[a, b]$, et sa primitive F est donc bien définie. De plus pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty . \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 : $|F_n(x) - F(x)|$ est majoré indépendamment de x par un terme qui tend vers 0. Donc la suite (F_n) converge vers F uniformément sur $[a, b]$. $\square$

La convergence uniforme sur I permet d'intégrer, mais pas de dériver, comme le montre l'exemple suivant.

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} .$$

La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto |x|$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Pourtant $f(x)$ n'est pas dérivable en 0, bien que la suite des dérivées $f'_n(x)$ converge (simplement).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par contre, si la suite des dérivées converge uniformément, on peut intégrer, et ce qui est vrai pour les primitives doit l'être pour les dérivées, si on fait attention à bien ajuster la constante d'intégration.

Théorème 6. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur $]a, b[$, dont les dérivées f'_n sont continues sur $]a, b[$. Soit g une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que

1. la suite (f'_n) converge uniformément vers g sur $]a, b[$,
2. il existe $x_0 \in]a, b[$, tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $]a, b[$ vers une fonction f , continûment dérivable sur $]a, b[$, telle que $f' = g$:

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) .$$

Démonstration : Comme (f'_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément, sa limite g est une fonction continue (théorème 4). Pour tout $x \in]a, b[$, posons

$$f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \text{où} \quad l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) .$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, f est continûment dérivable sur $]a, b[$ et sa dérivée est g . Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]a, b[$,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt .$$

Alors :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) - l + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + (b - a) \|f'_n - g\|_{\infty} . \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $\|f'_n - g\|_{\infty}$ tend vers 0 : $|f_n(x) - f(x)|$ est majoré indépendamment de x par un terme qui tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge vers f uniformément sur $]a, b[$. $\square$

1.3 Continuité uniforme

Le résultat principal de cette section est le théorème de Heine qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue. Il est utilisé en particulier pour démontrer qu'une fonction continue est intégrable au sens de Riemann, et nous vous avons demandé de l'admettre dans le chapitre sur l'intégration. Nous en profiterons aussi pour démontrer le théorème de Dini, qui est une sorte de réciproque du théorème 4. Nous commençons par le théorème de Bolzano-Weierstrass, puis viendra le lemme de Borel-Lebesgue, utilisé plusieurs fois dans les démonstrations qui suivront. Les deux sont des cas particuliers de résultats de topologie beaucoup plus généraux que vous apprendrez plus tard.

Théorème 7 (de Bolzano-Weierstrass). *De toute suite de réels bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : La démonstration se fait par dichotomie. Soit m un minorant et M un majorant de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M .$$

Posons $a_0 = m$ et $b_0 = M$, et $\varphi(0) = 0$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés : l'une au moins contient une infinité de termes de la suite

(u_n) . Supposons que $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ contienne une infinité de termes de la suite. On note $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, et $\varphi(1) > 0$ un entier tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$. Si la première moitié ne contient qu'un nombre fini de termes, on la remplace par l'autre moitié $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(M - m)/2^k$, et des valeurs extraites $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Par le théorème des gendarmes la suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers la même limite que (a_n) et (b_n) . $\square$

Le lemme de Borel-Lebesgue affirme que de tout recouvrement d'un intervalle $[a, b]$ fermé borné, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Lemme 1 (de Borel-Lebesgue). *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in [a, b]$ soit I_x un intervalle ouvert tel que $x \in I_x$. Il existe un nombre fini m , et m points $x_1, \dots, x_m$ tels que*

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m I_{x_i}.$$

Démonstration : La première étape consiste à montrer que pour un certain entier n , tout intervalle de la forme $]y - 1/n, y + 1/n[$ est inclus dans l'un des I_x au moins.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall y \in [a, b], \exists x \in [a, b], \quad]y - 1/n, y + 1/n[\subset I_x$$

Ecrivons la négation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad]y - 1/n, y + 1/n[\not\subset I_x$$

Pour tout n , soit y_n l'un des y dont l'existence est affirmée ci-dessus. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite $(y_{\varphi(k)})$, qui converge vers $c \in [a, b]$. En particulier, aucun des intervalles $]y_{\varphi(k)} - 1/\varphi(k), y_{\varphi(k)} + 1/\varphi(k)[$ n'est inclus dans I_c , ce qui est impossible si c est la limite de $(y_{\varphi(k)})$.

En utilisant la première étape, nous allons démontrer le lemme par l'absurde : nous supposons donc qu'aucune réunion finie des intervalles I_x ne recouvre $[a, b]$. Fixons un entier n dont l'existence est affirmée ci-dessus. Soit y_1 un point de $[a, b]$. Il existe x_1 tel que $]y_1 - 1/n, y_1 + 1/n[\subset I_{x_1}$. Comme I_{x_1} ne recouvre pas $[a, b]$, il existe un point y_2 de $[a, b]$ qui n'appartient pas à I_{x_1} . Ce point est à distance au moins $1/n$ de y_1 . Il existe un point x_2 tel que $]y_2 - 1/n, y_2 + 1/n[\subset I_{x_2}$. La réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$ ne recouvre pas $[a, b]$. Donc il existe y_3 en dehors de cette réunion : y_3 est à distance au moins $1/n$ de y_1 et de y_2 . Par récurrence, on construit ainsi une suite (y_k) de points de $[a, b]$ telle que deux quelconques de ses éléments sont à distance au moins $1/n$. En appliquant une fois de plus le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite de (y_k) devrait converger, d'où la contradiction. $\square$

La continuité uniforme est à la continuité ce que la convergence uniforme est à la convergence simple (comparez avec la définition 1).

Définition 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On dit que f est continue sur I si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

2. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Évidemment, la continuité uniforme implique la continuité (simple), mais la réciproque est fautive en général. La différence entre les deux est subtile. Dans la continuité simple, la valeur de η peut dépendre non seulement de ε mais aussi de x . Dans la continuité uniforme, elle ne peut dépendre que de ε : pour un ε donné, on peut choisir le même η pour tous les points de l'intervalle.

Examinons la fonction inverse sur $I =]0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 1/x \end{array}$$

Soit x un point de $]0, 1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. L'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]) = \left[\frac{1}{f(x) + \varepsilon}, \frac{1}{f(x) - \varepsilon} \right]$$

Cet intervalle contient x , et

$$x - \frac{1}{f(x) + \varepsilon} < \frac{1}{f(x) - \varepsilon} - x$$

Posons

$$\eta_x = x - \frac{1}{f(x) + \varepsilon} = x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \varepsilon} = \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}$$

Alors, pour tout y dans l'intervalle $[x - \eta_x, x + \eta_x]$, $f(y)$ reste dans l'intervalle $[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$. De plus, η_x est le plus grand réel possédant cette propriété. Observons que pour $\varepsilon > 0$ fixé, η_x tend vers 0 quand x tend vers 0.

Bien sûr, pour n'importe quel $\eta' < \eta_x$, l'implication

$$|y - x| \leq \eta' \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

reste vraie. Mais il n'est pas possible de choisir un même η' tel qu'elle reste vraie pour tous les x de $]0, 1]$: la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Examinons maintenant la fonction racine carrée sur le même intervalle $I =]0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Soit x un point de $]0, 1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. Pour $\varepsilon < f(x)$, l'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]) = [x - (2\varepsilon\sqrt{x} - \varepsilon^2), x + (2\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2)]$$

Pour $\varepsilon \geq f(x)$, c'est l'intervalle

$$[0, (\sqrt{x} + \varepsilon)^2] = [0, x + (2\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2)]$$

L'amplitude de ces intervalles dépend bien de x a priori. Posons $\eta = \varepsilon^2$. Nous allons démontrer que pour tout $x, y \in]0, 1]$, si $|y - x| < \eta$, alors $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui entraîne que f est uniformément continue sur I . Supposons d'abord $\varepsilon < f(x)$. Alors $2\varepsilon\sqrt{x} - \varepsilon^2 > \varepsilon^2 = \eta$. Donc l'intervalle $f^{-1}([f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon])$ contient l'intervalle $[x - \eta, x + \eta]$: si y vérifie $|y - x| < \eta$, alors $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Supposons maintenant $\varepsilon \geq f(x)$. Si $y \leq x$, alors $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon$. Si $x < y \leq x + \eta$, alors $0 \leq y \leq x + (2\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2)$, donc $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \varepsilon$.

Théorème 8 (de Heine). *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$, tout comme la fonction $x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $[10^{-3}, 1]$.

Démonstration : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit ε un réel strictement positif. Puisque f est continue sur $[a, b]$, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel strictement positif, que nous noterons η_x , tel que pour tout $y \in [a, b]$,

$$|y - x| \leq \eta_x \implies |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout x , considérons l'intervalle ouvert $]x - \eta_x, x + \eta_x[$, noté I_x . Par le lemme de Borel-Lebesgue, on peut extraire de cette famille d'intervalles un sous-recouvrement de $[a, b]$:

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_m \in [a, b], \quad [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m I_{x_i}$$

Puisque les intervalles ouverts $I_{x_1}, \dots, I_{x_m}$ recouvrent $[a, b]$, il existe η tel que si $|x - y| \leq \eta$, alors x et y appartiennent à un même intervalle I_{x_i} . Si c'est le cas,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

par définition de I_{x_i} . □

La continuité uniforme est une notion générale. Nous en aurons besoin plus loin pour des fonctions de deux variables.

Définition 4. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On dit que f est continue sur $I \times J$ si

$$\forall (x, t) \in I \times J, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall (y, s) \in I \times J, \\ (y, s) \in]x - \eta, x + \eta[\times]t - \delta, t + \delta[\implies |f(y, s) - f(x, t)| \leq \varepsilon$$

2. On dit que f est uniformément continue sur $I \times J$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, t) \in I \times J, \forall (y, s) \in I \times J, \\ (y, s) \in]x - \eta, x + \eta[\times]t - \delta, t + \delta[\implies |f(y, s) - f(x, t)| \leq \varepsilon$$

Attention, il ne suffit pas que les applications partielles soient continues sur I et J respectivement, pour que f soit continue sur $I \times J$: voir le théorème 3. Le théorème de Heine reste vrai pour un produit d'intervalles fermés bornés (et plus généralement pour tout espace topologique *compact*, comme vous l'apprendrez plus tard). Nous l'utiliserons pour les fonctions de deux variables dans la section 1.5.

Théorème 9. Soient I et J deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f est uniformément continue sur $I \times J$.

Démonstration : Fixons $x \in I$, et considérons l'application partielle $f_x : t \mapsto f(x, t)$. On déduit immédiatement de la continuité de f , que f_x est continue sur J . D'après le théorème de Heine, elle est donc *uniformément continue* sur J :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_x > 0, \forall t \in J, \forall s \in J, |t - s| < \delta_x \implies |f(x, t) - f(x, s)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Écrivons de même que, pour tout $t \in J$, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est uniformément continue sur I .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_t > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| < \eta_t \implies |f(x, t) - f(y, t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Le problème dans les écritures ci-dessus est que δ_x et η_t dépendent respectivement de x et t . Or nous devons démontrer que la continuité est uniforme en les deux variables. Posons :

$$\forall x \in I, I_x =]x - \delta_x, x + \delta_x[\quad \text{et} \quad \forall t \in J, J_t =]t - \eta_t, t + \eta_t[$$

D'après le lemme de Borel-Lebesgue, on peut extraire de ces recouvrements des sous-recouvrements finis :

$$I \subset \bigcup_{i=1}^m I_{x_i} \quad \text{et} \quad J \subset \bigcup_{i=1}^{m'} J_{t_j}$$

Puisque les intervalles ouverts $I_{x_1}, \dots, I_{x_m}$ recouvrent I , il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors x et y appartiennent au même intervalle I_{x_i} . De même, il existe $\eta > 0$ tel que si $|s - t| < \eta$, alors s et t appartiennent au même intervalle J_{t_j} . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} |f(y, s) - f(x, t)| &\leq |f(y, s) - f(y, t_j)| + |f(y, t_j) - f(x_i, t_j)| \\ &\quad + |f(x_i, t_j) - f(x_i, t)| + |f(x_i, t) - f(x, t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Pour terminer cette section, voici une autre application du lemme de Borel-Lebesgue. Le *théorème de Dini* affirme que si une suite *croissante* de fonctions continues converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme (comparez avec le théorème 4).

Théorème 10 (de Dini). *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$:*

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Supposons que f_n converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Alors f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Évidemment, le résultat vaut pour une suite *décroissante*, en remplaçant f_n par $-f_n$.

Démonstration : Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in [a, b]$. Puisque $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, il existe un entier n_x tel que $0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon/3$. Par continuité de f en x , il existe $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - y| < \eta_1$, alors $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$. Par continuité de f_{n_x} en x , il existe $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - y| < \eta_2$, alors $|f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \varepsilon/3$. Posons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Pour tout $y \in]x - \eta, x + \eta[$:

$$f(y) - f_{n_x}(y) \leq |f(y) - f(x)| + (f(x) - f_{n_x}(x)) + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Notons I_x l'intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$. D'après le lemme de Borel-Lebesgue, on peut extraire des I_x un sous-recouvrement fini : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$ tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m I_{x_i}.$$

Notons n_0 le plus grand des entiers $n_{x_1}, \dots, n_{x_m}$. Soit $y \in [a, b]$: il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y \in I_{x_i}$. Puisque $(f_n(y))$ est une suite croissante, pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n_0}(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon ,$$

par définition de I_{x_i} . Comme l'entier n_0 ne dépend pas de y , la convergence est bien uniforme. $\square$

1.4 Séries de fonctions

Comme vous le savez, la convergence d'une série est équivalente par définition à la convergence de la suite des sommes partielles. Les théorèmes portant sur la continuité, l'intégration et la dérivation d'une suite de fonctions s'appliquent aux suites de sommes partielles, donc aux séries de fonctions. Au-delà de la réécriture des résultats de la section 1.2, l'enjeu principal de cette section sera de fournir des moyens de vérifier l'hypothèse principale de convergence uniforme, pour les sommes partielles d'une série.

Définition 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall x \in I, \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x) .$$

Soit s une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On dit que la série $\sum u_n$ converge simplement vers s sur I si la suite (s_n) converge simplement vers s sur I .
2. On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément vers s sur I si la suite (s_n) converge uniformément vers s sur I .

Les résultats suivants sont des traductions immédiates des théorèmes 4, 5 et 6.

Théorème 11. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit s une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément vers s , alors s est continue sur I .

Théorème 12. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit s une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément vers s , alors la série des primitives $\sum U_n$ définies sur $[a, b]$ par

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt ,$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction qui à x associe

$$S(x) = \int_a^x s(t) dt .$$

En particulier,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt .$$

Théorème 13. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur $]a, b[$, dont les dérivées u'_n sont continues sur $]a, b[$. Soit v une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que

1. la série $\sum u'_n$ converge uniformément vers v sur $]a, b[$,
2. il existe $x_0 \in]a, b[$, tel que la série $\sum u_n(x_0)$ converge.

Alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $]a, b[$ vers une fonction s , continûment dérivable sur $]a, b[$, telle que $s' = v$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) .$$

La convergence uniforme d'une série n'est pas toujours facile à vérifier. Heureusement on dispose de conditions suffisantes assez simples.

Définition 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement sur I si la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

Proposition 2. Si une série converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur ce même intervalle.

Démonstration : Par définition de la norme uniforme, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty$. Par le théorème de comparaison des séries, $\sum |u_n(x)|$ converge, donc $\sum u_n(x)$ converge absolument. Soit $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sa somme.

$$\begin{aligned} \left| s(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty . \end{aligned}$$

Le dernier majorant est le reste d'une série convergente, et il ne dépend pas de x : la convergence est bien uniforme. $\square$

Il n'est pas indispensable de calculer $\|u_n\|_\infty$ explicitement : il suffit d'en connaître un majorant, qui soit le terme général d'une série convergente.

Corollaire 1. Soit $\sum v_n$ une série convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |u_n(x)| \leq v_n.$$

Alors la série $\sum u_n$ est normalement, donc uniformément convergente.

L'autre critère utile est la version uniforme du théorème d'Abel.

Théorème 14. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur I telles que :

1. Pour tout $x \in I$, la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs.
2. La suite de fonctions $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
3. Les sommes partielles de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément bornées :

$$\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_0(x) + \cdots + b_n(x)| \leq M.$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge uniformément.

Démonstration : Les hypothèses assurent que $\sum a_n b_n$ converge simplement, par le théorème d'Abel pour les séries numériques. Notons $s(x)$ sa somme. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in I$, posons $B_n(x) = b_0(x) + \cdots + b_n(x)$. Par hypothèse, la suite $(B_n(x))$ est uniformément bornée. Écrivons le reste de la série $\sum a_n(x)b_n(x)$ sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k(x)a_k(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (B_k(x) - B_{k-1}(x))a_k(x) \right| \\ &= \left| -B_n(x)a_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} B_k(x)(a_k(x) - a_{k+1}(x)) \right| \\ &\leq | -B_n(x)a_{n+1}(x) | + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |B_k(x)|(a_k(x) - a_{k+1}(x)) \\ &\leq 2Ma_n(x) \end{aligned}$$

La suite (a_n) converge uniformément vers 0, il en est donc de même de la suite $(|s - s_n|)$.
□

Rappelons que si l'intervalle I est fermé borné, alors la convergence simple vers 0 d'une suite décroissante implique sa convergence uniforme, par le théorème de Dini 10. La convergence simple des a_n vers 0 est donc suffisante dans l'hypothèse 2. Dans de

nombreux cas, les b_n ne dépendent pas de x , et donc la question de l'uniformité de la majoration des sommes partielles ne se pose pas : par exemple pour les séries alternées où $b_n = (-1)^n$. Considérons le cas où $b_n = e^{inx}$. Les sommes partielles B_n se calculent explicitement :

$$\begin{aligned} |1 + \dots + e^{inx}| &= \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{1 - e^{ix}} \right|. \end{aligned}$$

Elles sont uniformément bornées, sur tout intervalle fermé borné *ne contenant aucun réel de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$* .

1.5 Fonction définie par une intégrale

Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction de deux variables, x et t . Nous considérons x comme un paramètre et $t \in [a, b]$ comme une variable d'intégration, permettant de définir

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt .$$

Pour que $F(x)$ existe, il suffit que les applications partielles $t \mapsto f(x, t)$ soient continues sur I . À ce stade du chapitre, vous ne devriez plus être surpris d'apprendre que cela ne garantit pas la continuité de la fonction F . Nous donnons des conditions suffisantes pour que F soit continue, puis dérivable, puis intégrable.

Théorème 15. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $J = [a, b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt ,$$

est continue sur I .

Démonstration : Soit x_0 un point de I . Fixons $\alpha > 0$ tel que l'intervalle fermé borné $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ soit inclus dans I . Le théorème de Heine 9 s'applique à la fonction f sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times J$: elle est donc uniformément continue. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que *pour tout $t \in J$,*

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \\
 &\leq (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon .
 \end{aligned}$$

□

Théorème 16. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $J = [a, b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que la dérivée partielle

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$$

existe et est continue sur $I \times J$. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt ,$$

est continûment dérivable sur I et :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt .$$

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Nous devons démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| < \varepsilon .$$

Écrivons :

$$\begin{aligned}
 &\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \\
 &= \left| \int_a^b \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt .
 \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in [a, b]$ il existe x_1 strictement compris entre x_0 et x , tel que

$$f(x, t) - f(x_0, t) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) .$$

Fixons $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ soit inclus dans I : la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ est uniformément continue sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a, b]$, d'après le théorème de Heine 9. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x_0| < \eta$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Si $|x - x_0| < \eta$, alors tout x_1 strictement compris entre x_0 et x est encore tel que $|x_1 - x_0| < \eta$, donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

En reportant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| &= \left| (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \\ &\leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b - a} . \end{aligned}$$

Il reste à intégrer entre a et b :

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \int_a^b |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b - a} dt = |x - x_0| \varepsilon ,$$

d'où le résultat en divisant par $|x - x_0|$. □

Théorème 17. Soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $J = [a, b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt ,$$

est intégrable sur I et

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t) dx \right) dt .$$

Démonstration : Par le théorème 15, la fonction F est continue sur $]\alpha, \beta[$, donc intégrable. Pour $z \in]\alpha, \beta[$, considérons la fonction :

$$\varphi(x, t) = \int_\alpha^x f(y, t) dy .$$

C'est une fonction continue sur $I \times J$. Sa dérivée partielle par rapport à x est $f(x, t)$, qui est elle aussi continue sur $I \times J$. On peut donc lui appliquer le théorème précédent. La fonction qui à x associe

$$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(x, t) dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^x f(y, t) dy \right) dt$$

est dérivable et sa dérivée est :

$$\Phi'(x) = \int_a^b f(x, t) dt .$$

On obtient donc, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$:

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^x f(y, t) dy \right) dt = \int_\alpha^x \left(\int_a^b f(y, t) dt \right) dy .$$

D'où le résultat. □

1.6 Intégrales convergentes

Comme si cela ne suffisait pas, nous avons encore une difficulté à ajouter ; que se passe-t-il si l'intégrale définissant une fonction est prise sur un intervalle infini, ou bien si la fonction à intégrer tend vers l'infini en un point ? La convergence d'une intégrale s'étudie en isolant les « problèmes » s'il y en a plusieurs. Chaque type de problème peut ensuite se ramener par un changement de variable, au cas d'une intégrale sur $[0, +\infty[$. Afin de ne pas alourdir les notations, nous nous limiterons à ce dernier cas. Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $I \times [0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que l'intégrale de l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ soit convergente sur $[0, +\infty[$. Nous souhaitons étudier la fonction qui à $x \in I$ associe

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt .$$

Comme vous le savez, une intégrale convergente est définie comme une limite d'intégrales sur des intervalles bornés. Posons

$$F_A(x) = \int_0^A f(x, t) dt \quad \text{donc} \quad F(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} F_A(x) .$$

Les résultats de la section précédente donnent des conditions sous laquelle $F_A(x)$ est continue, dérivable, intégrable, *pour A fixé*. Pour passer à la limite quand A tend vers l'infini, on ajoute comme d'habitude une hypothèse de convergence uniforme.

Définition 7.

1. On dit que l'intégrale $F(x)$ converge simplement si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \in \mathbb{N}, \forall A > A_0, \quad |F_A(x) - F(x)| < \varepsilon .$$

2. On dit que l'intégrale $F(x)$ converge uniformément si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \in \mathbb{N}, \forall A > A_0, \forall x \in I, \quad |F_A(x) - F(x)| < \varepsilon .$$

Sous l'hypothèse de convergence uniforme, les résultats sont bien ceux que vous attendez.

Théorème 18. *Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^+$ et si l'intégrale $F(x)$ converge uniformément, alors la fonction F est continue sur I .*

Théorème 19. *On suppose que la dérivée partielle*

$$(x, t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$$

existe et est continue sur $I \times \mathbb{R}^+$. On suppose de plus que son intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

converge uniformément. Alors la fonction F est continûment dérivable sur I et :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt .$$

Théorème 20. *Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^+$ et si l'intégrale $F(x)$ converge uniformément, alors la fonction F est intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$ et*

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt .$$

Nous ne donnerons la démonstration que pour la continuité : les deux autres résultats ont des démonstrations très proches, que nous vous engageons vivement à écrire à titre d'exercice.

Démonstration : [du théorème 18] Soit A_n une suite de réels, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_{A_n}(x) = \int_0^{A_n} f(x, t) dt .$$

Pour tout n , fixé, la fonction F_{A_n} est continue, par application du théorème 15. Par définition, la suite de fonctions $(F_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (simplement) vers F . Il suffit de montrer que la convergence est uniforme pour en déduire la continuité de $F(x)$, par le théorème 4. C'est précisément ce qu'affirme l'hypothèse. $\square$

Les critères permettant de s'assurer qu'une intégrale converge uniformément ressemblent fort à ceux des séries.

Définition 8. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, notons f_t l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$. Rappelons que

$$\|f_t\|_\infty = \sup\{|f(x, t)|, x \in I\}.$$

On dit que l'intégrale $F(x)$ converge normalement, si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \|f_t\|_\infty dt$$

converge

Proposition 3. Si une intégrale converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur ce même intervalle.

Démonstration : Par définition de la norme uniforme, pour tout $x \in I$, $|f(x, t)| \leq \|f_t\|_\infty$. Par le théorème de comparaison des intégrales, $\int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ converge absolument.

$$\begin{aligned} |F(x) - F_A(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} f(x, t) dt - \int_0^A f(x, t) dt \right| \\ &\leq \int_A^{+\infty} |f(x, t)| dt \\ &\leq \int_A^{+\infty} \|f_t\|_\infty dt \end{aligned}$$

Le dernier majorant est le reste d'une intégrale convergente, et il ne dépend pas de x : la convergence est bien uniforme. $\square$

Il n'est pas indispensable de calculer $\|f_t\|_\infty$ explicitement : il suffit d'en connaître un majorant fonction de t , dont l'intégrale soit convergente.

Corollaire 2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ soit convergente et telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, \quad |f(x, t)| \leq g(t).$$

Alors l'intégrale $F(x)$ est normalement, donc uniformément convergente.

L'utilisation de ce corollaire est tellement fréquente, qu'on a donné un nom à cette situation : on parle de *convergence dominée*.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Pour les doubles suites suivantes, l'identité

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{m,n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,n} \right)$$

est-elle vraie ou fausse et pourquoi ?

1. ☐ $u_{m,n} = 2^{m-n}$
2. ☒ $u_{m,n} = 2^{-m-n}$
3. ☒ $u_{m,n} = \frac{2^{-n}}{m}$
4. ☐ $u_{m,n} = m2^{-n}$
5. ☒ $u_{m,n} = \frac{n}{nm + m}$
6. ☐ $u_{m,n} = \frac{n^2}{nm + m}$
7. ☒ $u_{m,n} = \frac{nm}{nm + 1}$
8. ☒ $u_{m,n} = \frac{nm + 1}{nm + m}$
9. ☐ $u_{m,n} = \frac{nm + n^2}{nm + m^2}$

Vrai-Faux 2. Pour les doubles suites suivantes, la convergence de $(u_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme en m : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☒ $u_{m,n} = \frac{\sin(m)n}{n+1}$
2. ☐ $u_{m,n} = \frac{m \sin(m)n}{n+1}$
3. ☒ $u_{m,n} = \frac{2^{-m}n}{n+1}$
4. ☒ $u_{m,n} = m + \frac{1}{n+1}$
5. ☐ $u_{m,n} = m \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$
6. ☐ $u_{m,n} = \frac{mn}{n+1}$
7. ☐ $u_{m,n} = \frac{mn}{n+m^2}$

$$8. \quad \boxed{\times} \quad u_{m,n} = \frac{mn + m + 1}{n + 1}$$

$$9. \quad \boxed{\times} \quad u_{m,n} = \frac{\sin(m)n}{n + 1}$$

Vrai-Faux 3. Pour les suites de fonctions suivantes, l'identité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

est-elle vraie ou fausse et pourquoi ?

$$1. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = e^{-n+x}$$

$$2. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = e^{-nx}$$

$$3. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = e^{-n/x}$$

$$4. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = e^{-n/x^2}$$

$$5. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

$$6. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \frac{xn}{n+x}$$

$$7. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = \frac{xn}{xn+1}$$

$$8. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \frac{1+nx}{n}$$

Vrai-Faux 4. Pour les suites de fonctions suivantes, la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme en x sur $[-1, 1]$: vrai ou faux et pourquoi ?

$$1. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n}$$

$$2. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \sin(x) + e^{x-n}$$

$$3. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \sin(x) \left(1 + \frac{x^n}{n} \right)$$

$$4. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = \sin(x) (1 + x^n)$$

$$5. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \sin^n(x)$$

$$6. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = \sin^n(\pi x)$$

$$7. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = e^{-nx} \sin(x)$$

$$8. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = (x(1-x))^n$$

$$9. \quad \boxed{\times} \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Vrai-Faux 5. Pour les suites de fonctions suivantes, la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme en x sur $\mathbb{R}$: vrai ou faux et pourquoi ?

$$1. \quad \boxed{\square} \quad f_n(x) = \sin(x/n)$$

2. ☒ $f_n(x) = \sin(x) + \frac{1}{n}$
3. ☐ $f_n(x) = \sin(x) + e^{x-n}$
4. ☐ $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
5. ☒ $f_n(x) = \left(\frac{1}{2+x^2}\right)^n$
6. ☐ $f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$
7. ☒ $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$
8. ☐ $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$

Vrai-Faux 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_n(x) = 1$ si $x \in [-u_n, u_n]$, $f(x) = 0$ sinon. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si (u_n) tend vers 1, alors (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. ☒ Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (f_n) converge simplement vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. ☐ Si (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$, alors la suite (u_n) converge.
4. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
5. ☒ La suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
6. ☐ Si (u_n) tend vers 1, alors (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$.

Vrai-Faux 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = u_n$ si $x > 0$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (u_n) converge vers une limite finie.
2. ☐ Si (u_n) tend vers 1, alors (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. ☒ La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (u_n) tend vers 0.
4. ☒ La suite (f_n) converge uniformément sur $] -\infty, 0]$.
5. ☐ La suite (f_n) converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

Vrai-Faux 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_n(x) = u_n$ si $x \in [-u_n, u_n]$, $f(x) = 0$ sinon. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (u_n) converge vers une limite finie.
2. ☒ Si (u_n) tend vers 2, alors (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$.
3. ☐ Si (u_n) tend vers 1, alors (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$.
4. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$.
5. ☒ La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la suite (u_n) tend vers 0.
6. ☐ Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Vrai-Faux 9. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ alors f est continue en 0.
2. ☐ Si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur $[0, 1]$, alors f est continue en 0.
3. ☒ Si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur $[-1, 1]$, alors f est continue en 0.
4. ☒ Si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. ☒ Si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$, alors f est continue sur $] -1, 1[$.
6. ☐ Si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ simplement sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$, alors la convergence est uniforme sur $] -1, 1[$.
7. ☐ Si pour tout x la suite $(f_n(x))$ est croissante et si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ simplement sur $] -1, 1[$ alors $f(x)$ est continue sur $] -1, 1[$.
8. ☒ Si pour tout x la suite $(f_n(x))$ est croissante, si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ simplement sur $[-1, 1]$ et si f est continue sur $[-1, 1]$, alors la convergence est uniforme sur $[-1, 1]$.
9. ☐ Si pour tout x la suite $(f_n(x))$ est croissante, si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ simplement sur $\mathbb{R}$ et si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Vrai-Faux 10. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $A > 0$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[-A, A]$. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1. ☒ f est continue sur $\mathbb{R}$
2. ☐ f_n converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. ☒ f_n converge vers f uniformément sur $[-1, 10]$
4. ☒ Pour tout $A > 0$, l'intégrale de f_n sur $[0, A]$ converge vers l'intégrale de f sur $[0, A]$.
5. ☐ La primitive de f_n nulle en 0 converge vers la primitive de f nulle en zéro, uniformément sur $\mathbb{R}$.

6. ☒ La primitive de f_n nulle en 0 converge vers la primitive de f nulle en zéro, uniformément sur $[-1, 1]$.
7. ☐ Si f_n est dérivable sur $] - 1, 1[$, alors f est dérivable sur $] - 1, 1[$.
8. ☐ Si f_n et f sont dérivables sur $] - 1, 1[$, alors pour tout $x \in] - 1, 1[$, $f'(x)$ est la limite de $f'_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

Vrai-Faux 11. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'application $x \mapsto 2x \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. ☒ L'application $x \mapsto 2x + \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. ☒ L'application $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est uniformément continue sur $]0, +\infty[$.
4. ☐ L'application $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est uniformément continue sur $]0, +\infty[$.
5. ☒ L'application $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est uniformément continue sur $[\varepsilon, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$.
6. ☐ L'application $x \mapsto \frac{1}{x(2-x)}$ est uniformément continue sur $]0, 2[$.
7. ☐ L'application $x \mapsto \frac{1}{x(2-x)}$ est uniformément continue sur $[\varepsilon, 2[$, pour tout $\varepsilon > 0$.
8. ☐ L'application $x \mapsto \frac{1}{x(2-x)}$ est uniformément continue sur $[\varepsilon, 2 - \varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Vrai-Faux 12. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $] - 1, 1[$. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1. ☐ f est uniformément continue sur $] - 1, 1[$.
2. ☒ f est uniformément continue sur $[-r, r]$, pour tout r tel que $0 < r < 1$.
3. ☐ f' est uniformément continue sur $[-r, r]$, pour tout r tel que $0 < r < 1$.
4. ☐ si f est bornée, alors f est uniformément continue sur $] - 1, 1[$.
5. ☒ si f' est bornée, alors f est uniformément continue sur $[-1, 1]$.

Vrai-Faux 13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ La série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
2. ☒ La série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[-r, r]$, pour tout r tel que $0 < r < 1$.
3. ☐ La série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
4. ☒ La série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
5. ☐ La série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $] - 1, 1[$.
6. ☐ La série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[-r, 1]$, pour tout r tel que $0 < r < 1$.

Vrai-Faux 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $] - 1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in] - 1, 1[$ la série $\sum u_n(x)$ converge et on note $s(x)$ sa somme :

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = s(x) .$$

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $] - 1, 1[$, alors s est continue sur $] - 1, 1[$.
2. ☒ Si pour tout $r \in]0, 1[$, la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $] - r, r[$, alors s est continue sur $] - 1, 1[$.
3. ☐ Si les u_n sont dérivables sur $] - 1, 1[$, alors s est dérivable sur $] - 1, 1[$.
4. ☒ Si pour tout $r \in]0, 1[$, la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $] - r, r[$, alors l'intégrale de $u_n(x)$ sur $] - 1, 1[$ converge vers l'intégrale de $s(x)$ sur $] - 1, 1[$.
5. ☒ Si les u_n sont dérivables sur $] - 1, 1[$, et si pour tout $r \in]0, 1[$ la série $\sum u'_n(x)$ est normalement convergente sur $[-r, r]$, alors s est dérivable sur $] - 1, 1[$.

Vrai-Faux 15. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ tend vers 0, alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge simplement sur $[-1, 1]$.
2. ☐ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante, alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
3. ☒ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ décroît et tend vers 0, alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
4. ☒ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ décroît et tend vers 0, alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
5. ☐ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ décroît et tend vers 0, alors la série $\sum \cos(n\pi x) a_n(x)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
6. ☒ Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ décroît et tend vers 0, alors la série $\sum \sin(2n\pi x) a_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[-r, r]$, pour $r \in]0, 1[$.

Vrai-Faux 16. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on note $f(x, t) = e^{t \sin(x)}$ et $F(x)$ l'intégrale $F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. ☒ La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. ☐ La fonction F est périodique de période 2π .
4. ☒ La dérivée de F est $F'(x) = \int_0^1 \cos(x) e^{t \sin(x)} dt$.
5. ☒ L'intégrale de F sur $[0, 2\pi]$ est égale à $\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} e^{t \sin(x)} dx \right) dt$.

Vrai-Faux 17. Pour x et t appartenant à $\mathbb{R}^+$, on note $f(x, t) = t^x e^{-t}$ et $F(x)$ l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ L'intégrale définissant F converge normalement, donc uniformément.
2. ☒ La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. ☐ L'intégrale de F sur $\mathbb{R}^+$ converge.
4. ☒ L'intégrale de F sur $[0, 1]$ est égale à $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^x e^{-t} dx \right) dt$.
5. ☐ Pour tout $x > 0$, La dérivée de F en x est $xF(x)$.

Vrai-Faux 18. Pour x et t appartenant à $[0, 1]$, on note $f(x, t) = t^{-x}$ et $F(x)$ l'intégrale $F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'intégrale définissant F converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.
2. ☒ La fonction F est continue sur $[0, 1[$.
3. ☐ L'intégrale de F sur $[0, 1]$ converge.
4. ☒ L'intégrale de F sur $[0, \frac{1}{2}]$ est égale à $\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-x} dx \right) dt$.
5. ☐ Pour tout $x \in [0, 1]$, La dérivée de F en x est $xF(x - 1)$.

2.2 Exercices

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n(1 - x) .$$

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$
2. Montrer que f admet un maximum en $\frac{n}{n+1}$ et calculer ce maximum.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

5. Reprendre les questions précédentes pour

$$f_n(x) = \sqrt{n} x^n (1-x), \text{ puis } f_n(x) = n x^n (1-x), \text{ puis } f_n(x) = n^2 x^n (1-x).$$

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1]$:

$$f_n(x) = (1 - x^n) \cos(1/x).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
2. Calculer $f_n(1/(2k\pi))$. En déduire la valeur de $\|f_n\|_\infty$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?
4. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, 1]$, pour $a > 0$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, où $A \in \mathbb{R}^+$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
4. Reprendre les questions précédentes pour

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \text{ puis } f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

On pourra utiliser l'encadrement :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $|f_n|$ admet un maximum en $\pm \sqrt{\frac{1}{2n-1}}$ et calculer ce maximum.
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et vérifier que la limite est nulle.

5. On pose

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) .$$

Calculer $s_n(x)$.

6. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0+} s_n(x) .$$

7. Pour chacun des intervalles I suivants, la suite (s_n) converge-t-elle uniformément sur I ?

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad I =]0, +\infty[\quad ; \quad I = [10^{-7}, 10^{+7}] \quad ; \quad I = [-10^{-7}, 10^{-7}] .$$

Exercice 5. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_0(t) = 0$ et pour tout $n \geq 0$:

$$f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)} .$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Démontrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_{n+1}(t) - f(t)| \leq \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)} .$$

4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.
3. En déduire que la convergence est uniforme sur tout segment $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 + \frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.
3. En déduire que la convergence est uniforme sur tout segment $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 8. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un intervalle I . La suite (f_n) converge simplement, uniformément sur I ? (Justifier votre réponse).

1. $f_n(x) = x^n$, $I = [0, 0.99]$
2. $f_n(x) = x^n$, $I = [0, 1[$
3. $f_n(x) = nx^n \sin(\pi x)$, $I = [0, 1]$
4. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}$, $I = \mathbb{R}$
5. $f_n(x) = \frac{1}{1 + (n + x)^2}$, $I = \mathbb{R}^+$
6. $f_n(x) = \frac{1}{1 + (n + x)^2}$, $I = \mathbb{R}$
7. $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + 1}{n + x}$, $I = \mathbb{R}^+$
8. $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, $I = \mathbb{R}$
9. $f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}$, $I = [0, 1]$
10. $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$, $I = \mathbb{R}$
11. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$, $I = \mathbb{R}^+$
12. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$, $I = [10^{-3}, +\infty[$
13. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n \sin(x)}$, $I = [0, \pi[$
14. $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{1-n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$, $I = [0, 1]$
15. $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{(1-n)\sqrt{n}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$, $I = [0, 1]$
16. $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx^3} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{nx^3}{(1+nx^3)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $I = [0, 1]$

Exercice 9. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|P_n - P_{n_0}| \leq 1$.
2. En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $P_n = P_{n_0} - P_{n_0}(0) + P_n(0)$.
3. En déduire que f est une fonction polynomiale.

Exercice 10. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'_n(x)$. Montrer que (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

1. Montrer que $x \mapsto \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ est uniformément continue sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, mais pas sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $x \mapsto \sin(x^2)$ est uniformément continue sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $x \mapsto e^x$ est uniformément continue sur $] - \infty, a]$ pour tout $a > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $x \mapsto \ln(x)$ est uniformément continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, mais pas sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq a|x| + b.$$

2. On suppose que la suite $(f(n))$ tend vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \text{inf ty}} f(x) = +\infty.$$

3. Peut-on remplacer $+\infty$ par une limite finie dans la question précédente?

Exercice 13. Soit (a_n) une suite de réels. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = a_n \mathbb{I}_{[n, n+1[}(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on déterminera.

2. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément si et seulement si la suite (a_n) tend vers 0.
3. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente si et seulement si la série $\sum a_n$ converge absolument.

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note $s = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $] -\infty, a[\cup]a, +\infty[$, pour tout $a > 0$. En déduire que s est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que s est continue sur $\mathbb{R}$.
- 5.

Exercice 15. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1 + nx)}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.
3. Reprendre les questions précédentes pour $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Exercice 16. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $u_n(x) = e^{n(x-n)}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme.
2. Montrer que $\sum u_n$ est normalement convergente sur tout intervalle $] -\infty, a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.
3. Soit k un entier positif. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ est normalement convergente sur tout intervalle $] -\infty, a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que s est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = ne^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, pour $a > 0$, mais pas sur $]0, +\infty[$.
3. On note $s(x)$ sa somme. Montrer que $s(x)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Calculer $\int_a^x U(t) dt$, où $0 < a < x$. En déduire $s(x)$.

Exercice 18. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de terme général u'_n ne converge uniformément sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 19. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais pas absolument.
2. Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

1. Justifier l'existence de F et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F'(x)$, sous forme intégrale.
3. Montrer que F' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F''(x)$, sous forme intégrale.
4. Montrer que F est solution de l'équation de Bessel $xF''(x) + F'(x) + xF(x) = 0$. On pourra calculer la dérivée par rapport à t de $\sin(x \sin(t))$.

Exercice 21. On considère la fonction F , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Justifier l'existence de F et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F'(x)$, sous forme intégrale.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) .$$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x^2)$. Démontrer que :

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

6. En déduire que :

$$g(x) + \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 .$$

7. Déduire de ce qui précède que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Exercice 22. Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et A tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f(t)| \leq Ae^{-at} .$$

On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt .$$

(F est la *transformée de Laplace* de f).

1. Démontrer que F est définie et continue sur $] -a, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]a, +\infty[$ et donner une expression intégrale de sa dérivée.
3. On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) .$$

4. On suppose que f' vérifie la même hypothèse que f . On pose :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-xt} dt .$$

À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, démontrer que :

$$G(x) = xF(x) - f(0) .$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Pour la double suite proposée, la convergence de $(u_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme en m .

- ☐ A $u_{n,m} = m + \frac{1}{n+1}$
- ☐ B $u_{n,m} = m \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
- ☐ C $u_{n,m} = \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
- ☐ D $u_{n,m} = \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{m^2}{n}\right)$
- ☐ E $u_{n,m} = \left(1 + \frac{m}{n}\right)$

Question 2. Pour la suite de fonctions proposée, la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme en x sur $[0, +\infty]$.

- ☐ A $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{n}$
- ☐ B $f_n(x) = e^{-nx}$
- ☐ C $f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}$
- ☐ D $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}$
- ☐ E $f_n(x) = nxe^{-nx}$

Question 3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- ☐ A Si pour tout $x \in (0, 1]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors $f(x)$ est continue en $\frac{1}{2}$.
- ☐ B Si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, alors $f(x)$ est continue en $\frac{1}{2}$.
- ☐ C Si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, alors f est continue en 0.
- ☐ D Si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1[$ est la limite des intégrales des f_n sur $[0, 1]$.
- ☐ E Si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[0, 1]$, alors $f(x)$ est dérivable en $\frac{1}{2}$.

Question 4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $A > 0$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ uniformément sur $[0, A]$. Vous pouvez en déduire l'affirmation proposée.

- ☐ A f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- ☐ B f est dérivable à droite en 0.
- ☐ C f_n converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
- ☐ D Si f_n et f sont dérivables en 1, alors $f'(1)$ est la limite de $f'_n(1)$ quand n tend vers l'infini.
- ☐ E La primitive de f_n nulle en 0 converge vers la primitive de f nulle en zéro.

Question 5. L'application proposée est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

- ☐ A $x \mapsto e^{-x^2}$
- ☐ B $x \mapsto e^{-x}$
- ☐ C $x \mapsto x \cos^2(x)$
- ☐ D $x \mapsto (1 + x^2) \sin(x)$
- ☐ E $x \mapsto \ln(1 + x^2)$

Question 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^n$.

- ☐ A La série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- ☐ B La somme de la série $\sum u_n(x)$ est continue en 1.
- ☐ C La série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[-r, r]$, pour tout $r \in]0, 1[$.
- ☐ D La somme de la série $\sum u_n(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$.
- ☐ E La somme des intégrales de u_n sur $[-1, 1]$ converge.

Question 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in]0, 1[$ la série $\sum u_n(x)$ converge et on note $s(x)$ sa somme :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = s(x) .$$

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- ☐ A Si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $]\varepsilon, 1 - \varepsilon[$, alors s est continue sur $]0, 1[$.
- ☐ B Si les u_n sont dérivables sur $]0, 1[$, et si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, alors s est dérivable sur $] -1, 1[$.
- ☐ C Si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $]\varepsilon, 1 - \varepsilon[$, alors elle est uniformément convergente sur $]0, 1[$.
- ☐ D Si $s(x)$ est continue sur $[0, 1]$ alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- ☐ E Si pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, la série $\sum u_n(x)$ est normalement convergente sur $]\varepsilon, 1 - \varepsilon[$, alors l'intégrale de s sur $[0, 1]$ est la somme des intégrales des u_n sur $[0, 1]$.

Question 8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, convergeant simplement vers 0 sur $[0, 1]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- ☐ A La série $\sum \cos(n\pi x)a_n(x)$ converge simplement, pour tout $x \in [0, 1]$.
- ☐ B Si la série $\sum (-1)^n a_n$ converge simplement sur $[0, 1]$, alors elle converge uniformément.
- ☐ C Si pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante, alors la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ converge uniformément.
- ☐ D Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante, alors la somme de la série $\sum \sin(n\pi x)a_n(x)$ est intégrable sur $[0, 1]$.
- ☐ E Si pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante, alors la somme de la série $\sum (-1)^n a_n(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$.

Question 9. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \pi]$, on note $f(x, t) = \ln(1 + \sin^2(tx))$ et $F(x)$ l'intégrale $F(x) = \int_0^\pi f(x, t) dt$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- ☐ A La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ B La fonction F est périodique de période 2π .
- ☐ C La dérivée de F est $F'(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(2tx)}{1 + \sin^2(tx)} dt$.
- ☐ D F est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ E L'intégrale de F sur $[0, 1]$ est égale à $\int_0^1 \left(\int_0^\pi \ln(1 + \sin^2(tx)) dx \right) dt$.

Question 10. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $f(x, t) = e^{-xt^2}$ et $F(x)$ l'intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt$.

- ☐ A Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intégrale définissant F converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.
- ☐ B F est continue en 0.
- ☐ C F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- ☐ D L'intégrale de F sur $[0, +\infty[$ converge.
- ☐ E La dérivée de F en $x = 1$ est $\int_{-\infty}^{+\infty} (-2t)e^{-t^2} dt$.

Réponses : 1-AC 2-AC 3-BD 4-AE 5-AE 6-CD 7-AE 8-CD 9-AD 10-AC

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $J = [a, b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la

fonction F définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt .$$

1. Donner la définition de la continuité uniforme, pour une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème de Heine pour une fonction de deux variables.
3. Justifier l'existence de $F(x)$. Démontrer que F est continue sur I .
4. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $I \times J$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ entraîne, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

5. En déduire que F est dérivable en x_0 , de dérivée :

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt .$$

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} .$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Vérifier que :

$$\int_0^a u_n(x) dx = \frac{a}{n^2 + a^2} .$$

(On pourra intégrer par parties $\int_0^a \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$.)

En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right) .$$

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.
4. En déduire que

$$\int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} .$$

5. Démontrer l'inégalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx .$$

En déduire que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} .$$

6. Comparer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) dx .$$

Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 2 : On considère la fonction zéta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} .$$

On pose $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour $a > 1$. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
2. Pour tout $k \geq 1$, calculer $u_n^{(k)}$. Démontrer que la série $\sum u_n^{(k)}$ est normalement convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour $a > 1$. En déduire que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \zeta(x) .$$

4. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1 .$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt .$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 1$,

$$0 \leq x \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} .$$

6. Montrer que la série $\sum v_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour $a > 0$.

7. Pour tout $x > 0$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$. Montrer que la fonction δ est continue sur $]0, +\infty[$.

8. Montrer que :

$$\delta(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) .$$

Cette valeur, approximativement égale à 0,577215665 est habituellement notée γ : c'est la *constante d'Euler*.

9. Dédurre de ce qui précède que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma .$$

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On dit que f est *uniformément* continue sur $I \times J$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, t) \in I \times J, \forall (y, s) \in I \times J, \\ (y, s) \in]x - \eta, x + \eta[\times]t - \delta, t + \delta[\implies |f(y, s) - f(x, t)| \leq \varepsilon .$$

2. Soient I et J deux intervalles *fermés bornés* de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction *continue* sur $I \times J$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f est *uniformément continue* sur $I \times J$.
3. Pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, donc intégrable : ceci justifie l'existence de $F(x)$. Soit x_0 un point de I . Fixons $\alpha > 0$ tel que l'intervalle fermé borné $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ soit inclus dans I . Le théorème de Heine énoncé à la question précédente s'applique à la fonction f sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times J$: elle est donc uniformément continue. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que *pour tout* $t \in J$,

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \\ &\leq (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon . \end{aligned}$$

4. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in [a, b]$ il existe $x_1 \in]x_0, x[$, tel que

$$f(x, t) - f(x_0, t) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) .$$

Fixons $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ soit inclus dans I : la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ est uniformément continue sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [a, b]$, d'après le théorème de Heine énoncé à la question 2. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x_0| < \eta$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Si $|x - x_0| < \eta$, alors tout x_1 strictement compris entre x_0 et x est encore tel que $|x_1 - x_0| < \eta$, donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

En reportant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| &= |x - x_0| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \\ &\leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b - a} . \end{aligned}$$

5. Écrivons :

$$\begin{aligned} &\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt . \end{aligned}$$

La majoration de la question précédente, montre que si $|x - x_0| < \eta$, alors pour tout $t \in [a, b]$,

$$\left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq (x - x_0) \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

En intégrant entre a et b on obtient

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \int_a^b |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b - a} dt = |x - x_0| \varepsilon ,$$

d'où le résultat en divisant par $|x - x_0|$.

Exercice 1 :

1. La fonction $x \mapsto u_n(x)$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Pour n fixé, et x tendant vers $+\infty$, $|u_n(x)|$ est équivalent à $1/x^2$, qui est intégrable en $+\infty$. Donc $u_n(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Écrivons :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x \cdot x}{(n^2 + x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{n^2 + x^2} \right]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{n^2 + x^2} dx . \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx &= \int_0^a \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx \\ &= \int_0^a \frac{1}{n^2 + x^2} dx - 2 \int_0^a \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx . \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^a u_n(x) dx = \left[-\frac{x}{n^2 + x^2} \right]_0^a = \frac{a}{n^2 + a^2} .$$

En prenant la limite quand a tend vers l'infini :

$$\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = 0 ,$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right) = 0 .$$

3. Pour tout $x \in [0, a]$,

$$\left| \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{n^2 + a^2}{n^4} .$$

Or quand n tend vers l'infini $\frac{n^2 + a^2}{n^4}$ est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, a]} |u_n(x)| ,$$

est le terme général d'une série convergente : la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

4. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, elle converge uniformément, et donc :

$$\int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^a u_n(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

5. La fonction qui à x associe $\frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc pour tout $n \geq 1$:

$$\int_n^{n+1} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \leq \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{a}{x^2 + a^2} dx.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est intégrable, on peut sommer l'inégalité précédente, pour n allant de 1 à $+\infty$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx.$$

Or :

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{\frac{1}{a}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Et de même :

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Quand a tend vers $+\infty$, $\arctan(\frac{1}{a})$ tend vers 0, la borne de droite et la borne de gauche de l'encadrement convergent toutes les deux vers $\frac{\pi}{2}$, donc :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Dans les questions précédentes, nous avons obtenu successivement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Il n'est donc pas possible d'intervertir l'intégrale et la sommation. La convergence de la série $\sum u_n(x)$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 :

1. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur $]1, +\infty[$. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$,

$$\|u_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{n^a}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^a}$ est convergente pour $a > 1$. La série $\sum u_n(x)$ est donc uniformément convergente et sa somme $\zeta(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$. Mais comme ceci est vrai pour tout $a > 1$, la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$. En observant que $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$, on obtient :

$$\forall k \geq 1, u_n^{(k)}(x) = (\ln(n))^k e^{-x \ln(n)} = \frac{(\ln(n))^k}{n^x}.$$

Comme à la question précédente :

$$\|u_n^{(k)}\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} |u_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln(n))^k}{n^a}.$$

Pour tout $k \geq 1$, et pour tout $a > 1$, la série de terme général $\frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge. La série $\sum u_n^{(k)}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur tout intervalle $[a, +\infty[$. Pour $k = 1$, on en déduit que la fonction ζ est dérivable sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$. Supposons démontré que $\zeta^{(k)}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée :

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^k}{n^x}.$$

Le terme général de cette série est dérivable, et sa dérivée est $u_n^{(k+1)}(x)$, qui est le terme général d'une série uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. Donc $\zeta^{(k)}$ est elle-même dérivable sur $]1, +\infty[$, et sa dérivée est

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^{k+1}}{n^x}.$$

Par récurrence, la fonction ζ est donc indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$.

3. Pour tout $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}.$$

Chaque terme des inégalités ci-dessus est le terme général d'une série convergente. En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x},$$

soit

$$\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \zeta(x).$$

4. Pour $x > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{1}{1-x} t^{1-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

L'inégalité de gauche dans la question précédente, devient

$$\zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} .$$

Or quand x tend vers $+\infty$ le majorant tend vers 1. Mais d'autre part, $\zeta(x)$ est minorée par son premier terme, qui vaut 1. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1 .$$

D'autre part, en multipliant les inégalités de la question précédente par $x-1$:

$$1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x .$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1 .$$

5. Les inégalités suivantes ont été montrées à la question 3 :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} .$$

En soustrayant le majorant, puis en changeant le signe :

$$0 \leq \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} .$$

6. D'après la question précédente, $v_n(x)$ est positif et majoré par le terme général d'une série « télescopique », qui de plus est une fonction décroissante de x . Donc pour tout $a > 0$, pour tout $x \geq a$ et pour tout $n \geq 1$,

$$|v_n(x)| = v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a} .$$

Cette série est convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^a} = 1 .$$

La série $\sum v_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

7. D'après la question précédente, la série $\sum v_n(x)$ est uniformément convergente, sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour $a > 0$. Les fonctions $x \mapsto v_n(x)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, donc la somme $\delta(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$.

8. Par définition de $\delta(x)$,

$$\begin{aligned}
 \delta(1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k(x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) ,
 \end{aligned}$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) - \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0 .$$

9. Écrivons :

$$\begin{aligned}
 \zeta(x) - \frac{1}{x-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \delta(x) .
 \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, δ est continue en 1, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \delta(x) = \delta(1) = \gamma .$$

3 Compléments

3.1 Like a rolling stone

Début 1805, deux postes sont vacants à l'université de Prague : un en mathématiques, l'autre en « Sciences de la religion ». Bernard Bolzano (1781–1848) vient de soutenir sa thèse de mathématiques¹. Il a suivi des études de philosophie et de théologie ; il s'apprête à soutenir une thèse de philosophie et à être ordonné prêtre. Ses qualifications lui permettent donc de prétendre aux deux postes, mais un candidat ayant plus d'expérience pédagogique ayant obtenu la chaire de mathématiques, il devient professeur de sciences de la religion. Mauvaise pioche ! Cette chaire venait d'être créée pour faire obstacle à la diffusion des idées libérales de la philosophie des lumières et de la révolution française, et enseigner les principes de la morale chrétienne aux étudiants en philosophie ; or Bolzano intitule son discours inaugural « De la nécessité d'une foi qui avance sur des bases rationnelles ». Trois mois après sa prise de fonctions, un décret impérial le révoque, l'accusant de diffuser les idées de Kant. C'était faux : toute sa vie Bolzano se présentera lui-même comme l'« anti-Kant », souhaitant « endiguer – par la diffusion de notions claires – l'épouvantable désordre que Kant, sans le présumer lui-même, a occasionné par ses philosophèmes en Allemagne ». Bolzano se justifie et est réintégré ; mais, plutôt que le manuel de religion édicté par l'aumônier de la cour, il continue à exposer ses vues sur une société égalitaire, sur le droit des Tchèques à parler leur langue, sur le racisme et l'esclavage, sur l'éducation sexuelle, sur la séparation des pouvoirs religieux et politiques, etc. Le plus étonnant finalement, est qu'il soit resté en fonction aussi longtemps ; le 24 décembre 1819, Bolzano est définitivement révoqué et placé sous surveillance policière. Suit un procès de 5 ans, à l'issue duquel on lui interdit toute activité sur le territoire de l'Empire Austro-Hongrois, ainsi que toute publication. L'interdiction ne sera levée partiellement pour les écrits scientifiques, qu'en 1830. Souffrant de tuberculose et hébergé par un couple d'amis, son chômage forcé lui permet de se consacrer exclusivement à son œuvre. Rien moins que « d'énoncer les règles qui président à un exposé scientifique, c'est-à-dire les règles d'après lesquelles nous devons procéder lorsqu'il s'agit de diviser le domaine entier de la vérité en sciences particulières et de rédiger pour chacune des manuels ». Une œuvre immense : une fois publié, l'ensemble comportera 60 volumes, la plupart en 2 ou 3 tomes : logique, épistémologie, religion, et bien sûr mathématiques. Mais en attendant, pas question de braver l'interdiction de publier. Sentant sa mort prochaine, Bolzano confie par testament l'ensemble de ses manuscrits à un de ses élèves, dont il avait supervisé la formation depuis son plus jeune âge. Il attendait beaucoup de la postérité : à propos de sa « Philosophie des Sciences », il dit : « Si les vues exposées dans ce livre sont justes, elles feront la révolution dans plus d'une science : à savoir en métaphysique, en morale et en droit, en esthétique, en mathématique, dans la partie rationnelle de la physique, dans la théorie philosophique du langage et (Dieu nous garde) aussi en théologie ».

1. S. Lapointe : Bernard Bolzano : contexte et actualité *Philosophiques*, 30(1), 3–17 (2003)

Malheureusement, cet élève, par indolence, manque d'intérêt ou incompréhension, ne se montre pas particulièrement pressé, en particulier en ce qui concerne les écrits scientifiques. Il faut dire que l'élève était plus porté sur la philosophie, la littérature et l'esthétique que sur les mathématiques. Il finira par léguer le fond de manuscrits en sa possession à l'académie tchèque des sciences. Il faudra un bon siècle après la mort de Bolzano, et les efforts conjugués de nombreux chercheurs, pour comprendre l'ampleur de ce que Bolzano avait laissé. Il serait un peu réducteur de blâmer uniquement l'élève des retards dans la diffusion de la pensée de Bolzano. L'interdiction impériale, les réticences philosophiques ou religieuses, la difficulté même du contenu ont certainement joué. Il n'empêche : certains considèrent, non sans quelque exagération, que le progrès des mathématiques en a été retardé d'un bon demi-siècle. Au fait : le nom de cet élève philosophe et quelque peu négligent ? Robert Zimmermann (1824–1898).

3.2 Tout le monde peut se tromper

Avec une fausse modestie teintée de mauvaise foi, d'Alembert, deux ans avant sa mort écrit à Lagrange² :

Je m'amuse à repasser toutes les sottises mathématiques que j'ai écrites depuis quarante ans et je jette sur le papier quelques remarques que cette lecture me suggère ; mais ces remarques ne paraîtront tout au plus qu'après ma mort, si même ceux à qui je les laisserai les jugent dignes de paraître, ce qui est au moins fort douteux.

Des « sottises mathématiques » les plus grands en ont écrit, même Cauchy ! Pensez donc : 789 articles ! 27 épais volumes ! Fouiller les œuvres complètes de Cauchy pour y détecter des incorrections ponctuelles est passablement vain, mais relativement facile.

Celle qui suit est la plus célèbre ; elle se trouve dans le « Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, par M. Augustin-Louis Cauchy, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École Polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur ».

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x , dans le voisinage d'une valeur particulière attribué à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x , dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α .

2. P. Crépel : Les dernières perfidies de d'Alembert, *Mathematics and Social Sciences* 176(4), p.61–87 (2006)

L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

THÉORÈME I. – *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .*

En 1826, Abel est à Paris, où il espère faire (re)connaître ses travaux sur la résolution des équations du cinquième degré, ainsi que sur les fonctions elliptiques³. Il a alors 24 ans, et ses contacts avec les plus grands mathématiciens du moment lui laissent une impression mitigée, qu'il exprime sans détour dans une lettre à son professeur norvégien.

Certes j'aurais dû t'écrire depuis longtemps, mais j'attendais d'abord la solution au sujet de mon mémoire que j'ai déposé à l'Institut. Mais ces hommes lents n'en finissent pas. Legendre et Cauchy étaient juges. Legendre est d'une complaisance extrême, mais malheureusement fort vieux. Cauchy est fou, et il est impossible d'avoir affaire avec lui. Pourtant c'est lui qui, à présent, est le mathématicien qui sait comment doivent être traitées les mathématiques. Ses travaux sont excellents ; mais il écrit obscurément. D'abord je ne comprenais rien à ses œuvres ; maintenant j'y arrive mieux. [...] Cauchy est infiniment catholique et bigot. Chose bien singulière pour un mathématicien ! D'ailleurs, il est le seul qui travaille les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère, etc. s'occupent exclusivement de magnétisme et d'autres parties de la physique.

Quand il écrit pour publication, le ton est plus révérencieux.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de M. Cauchy « Cours d'analyse de l'école polytechnique », qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Suivent quelques résultats, dont celui-ci.

Théorème V. Soit

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots \text{ etc.}$$

une série convergente, dans laquelle $v_0, v_1, v_2 \dots$ sont des fonctions continues d'une même quantité variable x entre les limites $x = a$ et $x = b$, la série

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots$$

3. R. Mansuy : Niels Abel et les critères de convergence www.bibnum.education.fr (2011)

où $\alpha < \delta$ sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Et Abel d'ajouter une note de bas de page à la fin de la démonstration :

Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (p. 131) le théorème suivant :
 « Lorsque les différens termes de la série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ etc. sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x . » Mais il semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \text{ etc.}$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x , où m est un nombre entier. Il y a, comme on sait, plusieurs séries de cette espèce.

Des exceptions pour un théorème « démontré » ? Qu'en termes galants ces choses-là sont dites !

Et Cauchy, qu'en avait-il pensé ? Il était bel et bien responsable de la perte du mémoire d'Abel, qu'il ne retrouvera qu'après la mort prématurée de son auteur. Y aurait-il un lien avec le fait qu'Abel l'ait pris en défaut ? Impossible de le savoir. Il ne reviendra sur le sujet qu'en 1853 (sans citer Abel), dans une « Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données ».

En établissant, dans mon « Analyse algébrique », les règles générales relatives à la convergence des séries, j'ai, de plus, énoncé le théorème suivant :
 [...]

Comme l'ont remarqué MM. Bouquet et Briot, ce théorème se vérifie pour les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Mais pour d'autres séries, il ne saurait être admis sans restriction.

[...]

Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

Ce « peu de mots » donne surtout l'impression que Cauchy remplace, sans dégager la notion d'uniformité, l'hypothèse de convergence par son critère, ce qui ne change pas grand chose au fait que le « théorème admet des exceptions ».

3.3 La paille dans l'oeil du voisin

Georges Berkeley (1685–1753) sait de quoi il parle. Il a suivi des études de philosophie, de mathématiques et de théologie, et a été ordonné prêtre. Il a parfaitement

compris et mesuré la révolution que représente le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz. En tant que religieux, il ressent douloureusement l'arrogance des nouveaux philosophes qui prétendent discuter des mystères de la foi sur une base rationnelle. En 1734 il publie un savoureux pamphlet :

The Analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician wherein it is examined whether the Object, Principles and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysterries and Points of Faith.

En exergue, ce verset célèbre des Évangiles :

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye.

S. Matt. C. VII. V. 5.

Berkeley prend un plaisir jubilatoire à tailler en pièces la nouvelle Analyse, et surtout ses bases théoriques plus que fumeuses. Quelques titres de paragraphes suffiront à vous donner une idée du ton.

VI. Differences of various orders, i.e. Quantities infinitely less than quantities infinitely little; and infinitesimal Parts of infinitesimals of infinitesimals, etc. without end or limit.

XVII. Hard to distiguish between evanescent Increments and infinitesimal Differences. Fluxions placed in various Lights. The great Author, it seems, not satisfied with his own notions.

XXII By virtue of a twofold mistake Analysts arrive at Truth, but not at Science : ignorant how they come at their own Conclusions.

XXIII The Conclusion never evident or accurate, in virtue of obscure or inaccurate Premises. Finite Quantities might be rejected as well as Infinitesimals.

XXXII Difficult and obscure Points constitute the Principles of the modern Analysis, and are the foundation on which it is built.

XXXIV. By what inconceivable Steps finite lines are found proportional to Fluxions. Mathematical Infidels strain at a Gnat and swallow a Camel.

XLVIII. Metaphysics of modern Analysts most incomprehensible.

Un à zéro : Berkeley a parfaitement raison ! Au XVIII^e siècle, Leibniz, puis Euler, les frères Bernoulli et les autres, volent de découverte en découverte, sans trop se préoccuper de cette épine dans leur talon. Mais avec le XIX^e naissant, les savants se transforment en professeurs et, peut-être aiguillonnés par les questions de leurs étudiants, s'efforcent petit à petit de clarifier les concepts de l'analyse⁴.

Pour imparfait qu'il soit, le Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de Cauchy en 1821, est un net progrès. Pour la première fois, le concept de limite est relié à des

4. J.V. Grabiner : Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus *The American Mathematical Monthly*, 90(3), p. 185–194 (1983)

combinaisons d'inégalités, et même si la notion d'uniformité n'est pas encore dégagée, la continuité est tout de même définie plus rigoureusement qu'un « graphe tracé sans lever le crayon ». En 1817, Bernard Bolzano, qui peut encore signer ses articles comme « Prêtre séculier, Docteur de Philosophie, Professeur Royal et Impérial de la Science de la Religion et Membre titulaire de la Société Royale des Sciences à Prague », s'attaque à la démonstration d'une « évidence », le théorème des valeurs intermédiaires⁵.

Dans la démonstration *la plus courante*, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement) doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques *pures* (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir à la *géométrie*. [...]

En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences », mais doivent être bien plutôt des « fondements » ; [...]

Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les *exemples* et les *applications* pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des *démonstrations* : on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression.

... un véritable manifeste de la rigueur mathématique ! Ce mémoire contient déjà (avant Cauchy) la définition de la convergence d'une suite, le critère « de Cauchy », la définition de la continuité d'une fonction, l'existence de la borne supérieure d'un ensemble non vide et majoré... il n'y manque qu'une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel. Bolzano en est conscient, et il reviendra sur le sujet dans un mémoire de 1834, publié longtemps après sa mort. Ses travaux inspireront à la fin du siècle les « axiomatiseurs » que seront Cantor et Dedekind.

L'analyse telle qu'elle vous est enseignée est héritée de l'« école de Berlin », et s'il faut retenir un seul nom, ce sera celui de Karl Weierstrass (1815–1897). C'est à lui que vous devez les ε et les η . Il avait appris le concept de convergence uniforme de son professeur

5. B. Bolzano : Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation (traduction de J. Sebestik) *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 17(2), p. 136–164 (1964)

Christoph Gudermann, et en avait reconnu l'importance. Il l'a transmis à son tour à ses élèves, parmi lesquels Heine.

Tout au long du XIX^e siècle, de nombreux mathématiciens ont ainsi contribué à « ôter la poutre dans l'œil » de l'analyse. Comme précurseurs, L'histoire a surtout retenu les noms de Bolzano et Cauchy. On sait qu'il se sont rencontrés plusieurs fois en 1834-1835 quand Cauchy était en exil à Prague, mais on ignore la teneur de leurs conversations : dommage...⁶

3.4 Dépouillé d'une gloire

Nous vous l'avons déjà dit, la gloire d'avoir dégagé la notion de convergence uniforme revient à l'école allemande de la seconde moitié du XIX^e ; elle a bel et bien échappé aux mathématiciens français, et à leur représentant le plus illustre, Cauchy. Devrait-elle revenir à un pays neutre ? Isaac Charles Elie Cellérier de Seigneux (1818–1889) helvète de naissance, fut professeur à l'Université de Genève, de 1875 à 1889. On ignore quand il écrivit sa « Note sur les principes fondamentaux de l'analyse »⁷. Voici ce que précisent les éditeurs en note de bas de page.

Ce mémoire a été trouvé dans les papiers de M. Cellérier, professeur à Genève, mort l'année dernière.

Il est entièrement écrit de sa main sur un papier jauni par le temps ; l'auteur a mis sur la feuille qui le renfermait la suscription que voici : « Très important, et, je crois, nouveau. – rédaction correcte. Peut être publié tel quel. » Malheureusement, le Mémoire ne comporte aucune date, et il sera sans doute impossible de savoir si les résultats essentiels qu'il contient ont été, ou non, obtenus avant ceux que l'on doit à MM. Weierstrass, Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini, etc. Quoi qu'il en soit, ils ont été obtenus indépendamment des travaux que nous venons de rappeler, comme le prouvera la lecture du Mémoire, et en particulier la phrase suivante que l'auteur n'aurait sûrement pas écrite s'il avait eu connaissance des recherches dont les fondements de l'Analyse ont été l'objet depuis une vingtaine d'années.

Quelle phrase ?

On pourrait, par un raisonnement analogue, c'est-à-dire en partageant $\beta - \alpha$ en intervalles de plus en plus petits, et considérant le nombre déterminé par la suite de leurs limites inférieures, démontrer quelques autres propriétés essentielles de toutes les fonctions continues, celles de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans devenir exactement égale à tout nombre intermédiaire, d'être susceptible d'une valeur maxima et minima qu'elle atteint

6. H. Benis-Sinaceur : Cauchy et Bolzano *Revue d'Histoire des Sciences* 26(2) p. 97–112 (1973)

7. Ch. Cellérier, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *Bull. Sci. Math., deuxième série*, tome XIV, pp. 142–160 (1890)

pour une valeur au moins de la variable, etc. Ces questions offrent peu d'intérêt, vu leur évidence. Nous remarquerons seulement que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

a un sens absolument déterminé, en désignant par $f(x)$ la fonction. Si l'on partage l'intervalle $\beta - \alpha$ en n parties égales, puis chacune en n autres, et ainsi de suite à l'infini, on peut faire correspondre une somme de produits dont chacun est celui de la valeur commune de l'intervalle, par la valeur minima de la fonction quand la variable s'y trouve comprise; la somme de ces produits correspondant à chaque intervalle étant désignée par s_1 pour le premier mode de partage, par s_2 pour le deuxième, et ainsi de suite, ces nombres $s_1, s_2, s_3, \dots$ formés suivant une loi déterminée, sont en nombre infini, constamment croissants, et la limite dont ils s'approchent est l'intégrale ci-dessus.

En clair, Cellérier avait parfaitement compris comment rendre rigoureux les énoncés portant sur une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné : théorème des valeurs intermédiaires, extrema atteints... tout juste daigne-t-il préciser comment définir son intégrale. Mais ce n'était pas tout. Voici la définition de la continuité uniforme :

Une autre manière de concevoir la continuité consisterait à dire que, quelque petit que soit γ , on peut toujours trouver un nombre h tel qu'on ait $f(x) - f(y) < \gamma$ quand $x - y < h$, x et y étant compris entre α et β , du reste quelconques. Cela revient à dire qu'on peut trouver une limite h convenant à la fois à toutes les valeurs de x . Ce nouvel énoncé n'est point tout à fait équivalent au précédent.

Mais aussi la convergence uniforme des séries de fonctions :

Une série dont les termes sont fonctions continues entre $x = \alpha$, $x = \beta$ sera aussi fonction continue entre ces deux limites si elle satisfait ce que nous nommerons la *condition de convergence commune*, c'est-à-dire si, quel que soit γ , on peut trouver un nombre n qui convienne à la fois à toutes les valeurs de x .

Cellérier donne la conséquence sur la continuité de la somme, puis sur son intégrale.

Représentons toujours par $f(x)$ la somme d'une série convergente dont les termes sont fonctions continues de x quand cette variable croît de α à β . S'il y a une convergence commune, alors les intégrales des termes prises entre deux limites comprises entre α et β auront pour somme $\int f(x) dx$ prise entre les mêmes limites.

Il n'en reste pas là.

Considérons la fonction donnée par la série suivante.

$$f(x) = \frac{\sin ax}{a} + \frac{\sin a^2 x}{a^2} + \frac{\sin a^3 x}{a^3} + \dots = \sum \frac{\sin a^n x}{a^n}$$

dans laquelle a est un entier constant que nous supposons positif et très grand. La série étant plus convergente que la progression $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots$, il est clair qu'elle a une convergence commune entre deux valeurs quelconques de x , et que, par suite, $f(x)$ est une fonction continue.

Cette série nous fournira un exemple soit d'une fonction qui n'a jamais de dérivée, soit d'une fonction qui n'a jamais aucune période de croissance ou de décroissance ; ces propriétés seront plus aisées à vérifier en supposant a pair pour la première et impair pour la seconde.

Le premier exemple publié de fonction continue nulle part dérivable est celui de Weierstrass en 1875 ; On a su depuis que Bolzano en avait un avant. Cellérier a-t-il la priorité ? Il a laissé peu de traces dans l'histoire des mathématiques. Voici comment il figure dans les « souvenirs d'un arpenteur genevois »⁸.

Ce dernier, contemporain de mon père, n'écoutait jamais une leçon de mathématiques au collège. Interrogé, il levait le nez du livre qu'il lisait, s'informait de quoi il était question, improvisait une démonstration toujours satisfaisante et se replongeait dans sa lecture. J'ai eu de lui des leçons de calcul différentiel et intégral. Son extrême modestie lui a valu d'être dépouillé d'une gloire dont se para un mathématicien de Paris, professeur en Sorbonne. Ce professeur venait de déclarer en chaire qu'on ne savait pas intégrer les fonctions elliptiques. Raoul Pictet, qui se trouvait parmi les assistants, s'approcha de lui après la leçon et lui communiqua le procédé, qu'il tenait de Charles Cellérier, pour intégrer les équations différentielles elliptiques. La démonstration parut dans la nouvelle édition de son cours que le professeur français se hâta de faire paraître, mais le nom de Cellérier n'y figura pas.

3.5 Une démonstration du théorème de d'Alembert

Cela fait belle lurette que personne n'en doute :

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant il peut y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. [...]

Qui parle de manière aussi péremptoire ? Descartes, en 1637. Il n'était pas le premier à le dire, tout polynôme de degré n a n racines (éventuellement complexes et/ou multiples). Ou bien simplement : tout polynôme à coefficients réels admet une racine réelle ou complexe ; c'est ce que réaffirme d'Alembert, un bon siècle plus tard.

Soit un multinôme quelconque $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x , y fasse

8. J.E. David, Notes au crayon, souvenirs d'un arpenteur genevois (1855–1898), *Éditions d'en bas, Lausanne (2004)*

évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x , et qui rendra ce multinôme égal à zéro.

Euler et d'Alembert ont eu un mérite : celui d'être les premiers à se poser la question d'une démonstration. Euler en parle pour la première fois en 1742 dans une lettre à Nicolas Bernoulli, où il affirme que chaque polynôme à coefficients réels s'écrit comme un produit de monômes et de binômes à coefficients réels. Quelques mois plus tard, Euler annonce qu'il a trouvé une démonstration, mais qu'elle n'est « pas encore assez rigoureuse ». Il présentera finalement cette démonstration le 10 novembre 1746. C'est le 6 décembre 1746 que d'Alembert envoie la sienne. Il indique en passant qu'Euler aurait « fait mention d'un ouvrage, où il a démontré en général la proposition dont il est question – ouvrage qui n'est pas encore publié ». Encore de quoi alimenter une des nombreuses polémiques qui ont émaillé la vie des deux savants. Pour vous donner une idée du ton, voici un extrait d'une lettre d'Euler de 1757, à propos de d'Alembert.

Il avoit prétendu aussi que j'insérasse de nouvelles déclarations sur quantités d'articles que je lui avois volé. Mais ma patience est poussée à bout, et je lui ai fait répondre que je n'en ferois rien, et qu'il puisse publier lui-même ses prétentions partout où il veut, et que je ne m'y opposerois point. Il aura de quoi remplir l'article de *prétention* dans l'*Encyclopédie*.

Les deux démonstrations d'Euler et d'Alembert étaient encore bien incomplètes selon nos critères. Voici ce qu'en disait Gauss en 1799, dans sa thèse (il était alors âgé de 22 ans).

Si on mène des opérations avec ces racines impossibles, comme si elles existaient, et si on dit par exemple, que la somme de toutes les racines de l'équation $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots = 0$ est égale à $-a$ même si certaines d'entre elles peuvent être impossibles (ce qui signifie réellement : même si certaines sont non-existantes et donc manquantes), alors je ne peux que dire que je désapprouve totalement ce genre d'argument.

Gauss donnera au cours de sa carrière 4 démonstrations différentes du théorème : celle de 1799, encore incomplète, deux en 1816 et une dernière en 1849, cinquante ans après la première ! Il ne fut pas le seul. Voici comment Cauchy introduit sa « Seconde note sur les racines imaginaires des équations », publiée au Bulletin de la Société Philomatique en 1817.

Qu'il soit toujours possible de décomposer un polynôme en produit de facteurs réels du premier et du second degré ; ou, en d'autres termes, que toute équation, dont le premier membre est une fonction rationnelle ou entière de la variable x , puisse toujours être vérifiée par des valeurs réelles ou imaginaires de cette variable : c'est une proposition que l'on a déjà prouvée de plusieurs manières. MM. Lagrange, Laplace et Gauss ont déjà employé diverses méthodes pour l'établir ; et j'en ai moi-même donné une démonstration fondée sur des considérations analogues à celles dont M. Gauss a fait usage.

Fort bien : le théorème pourrait donc s'appeler « théorème d'Euler-d'Alembert-Lagrange-Laplace-Gauss-Cauchy ». Allons au plus simple : c'est le *théorème fondamental de l'algèbre*. Peut-être, sauf qu'il n'existe aucune justification purement algébrique. Toutes les démonstrations connues (et elles sont nombreuses), passent à un moment ou un autre par des arguments d'analyse. Celle que nous allons vous présenter n'utilise que les outils de ce chapitre. Nous allons commencer par étendre à des boules fermées dans $\mathbb{C}$ ce qui vous est bien connu pour les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$: toute fonction continue atteint son minimum.

Proposition 4. *Soit r un réel strictement positif, et $D_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ le disque fermé de rayon r . Soit f une fonction continue sur D_r , à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe $z_0 \in D_r$ tel que :*

$$f(z_0) = \inf\{f(z), z \in D_r\}.$$

Démonstration : Vous n'avez pas manqué de remarquer que nous n'avons pas vraiment dit ce que signifie « continue sur D_r ». Vous auriez pu écrire vous même la définition :

$$\forall x \in D_r, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |y - x| < \eta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Mais au fait : en tant que fonction d'une variable complexe, f est aussi fonction de deux variables réelles : la partie réelle et la partie imaginaire. La continuité définie ci-dessus est-elle bien celle de la définition 4 ? Oui, et vous êtes priés de le démontrer à titre d'exercice (Indication : tout disque contient un carré et réciproquement). Tant que vous y serez, vous démontrerez aussi que si P est un polynôme à coefficients complexes, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur D_r , pour tout $r > 0$.

Nous commençons par montrer par l'absurde que la fonction f est minorée sur D_r . Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite (z_n) d'éléments de D_r tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) < -n.$$

La suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels dans $[0, r]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(|z_{\varphi(k)}|)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Mais les arguments des complexes $z_{\varphi(k)}$ forment une suite de réels à valeurs dans $[0, 2\pi]$. Toujours par Bolzano-Weierstrass, on peut encore extraire une sous-suite de la précédente, disons $(z_{\psi(h)})_{h \in \mathbb{N}}$ telle que la suite des arguments converge. Mais comme cette suite est extraite de la précédente, la suite des modules converge aussi. Donc la suite converge, vers un complexe z de D_r . Puisque f est continue, $|f(z_{\psi(h)}) - f(z)|$ tend vers 0. C'est impossible car $f(z_{\psi(h)})$ tend vers $-\infty$. Donc f est bien minorée sur D_r , et l'image de f admet une borne inférieure. Posons

$$m = \inf\{f(x), x \in D_r\}.$$

Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D_r telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = m.$$

Bon : extraire de cette suite une sous suite convergente, et démontrer que l'image de la limite est bien m ne devrait pas vous poser trop de problèmes non ? $\square$

Théorème 21 (fondamental de l'algèbre). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, avec $a_n \neq 0$. La fonction polynôme*

$$z \mapsto P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

s'annule sur $\mathbb{C}$.

Démonstration : Nous allons démontrer

1. que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum dans $\mathbb{C}$,
2. que ce minimum est nul.

Nous commençons par montrer que $|P(z)|$ est forcément supérieur à $|P(0)| = |a_0|$ en dehors d'un certain disque D_r . En effet :

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \\ &\geq |z^n| \left(|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \right) \end{aligned}$$

Le terme de la deuxième parenthèse tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini. Il existe M tel que pour $|z| > M$,

$$|P(z)| > |z|^n \frac{|a_n|}{2}.$$

Donc il existe $r > 0$, tel que pour $|z| > r$, $|P(z)| > |a_0| = |P(0)|$. Notons m le minimum de $|P(z)|$ sur D_r , et z_0 le point où il est atteint (en vertu de la proposition précédente) :

$$|P(z_0)| = m \leq |P(0)| = |a_0| < |P(z)|, \quad \forall z \notin D_r.$$

Donc m est le minimum de $|P(z)|$ sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Nous allons démontrer par l'absurde que $m = 0$. Posons :

$$Q(z) = P(z_0 + z) = b_0 + b_k z^k + \dots + b_n z^n,$$

où $|b_0| = m$ et k est le premier entier > 0 tel que b_k est non nul. Soit c une racine k -ième de $-b_0\overline{b_k}$, et t un réel, tel que $0 < t < 1$ et $|b_k|^2 t^k < 1$.

$$\begin{aligned}
|Q(ct)| &= |b_0 + b_k(-b_0\overline{b_k})t^k + b_{k+1}c^{k+1}t^{k+1} + \dots + b_n c^n t^n| \\
&= |b_0 - b_0|b_k|^2 t^k + b_{k+1}c^{k+1}t^{k+1} + \dots + b_n c^n t^n| \\
&\leq m(1 - |b_k|^2 t^k) + |b_{k+1}c^{k+1}t^{k+1} + \dots + b_n c^n t^n| \\
&\leq m(1 - |b_k|^2 t^k) + t^{k+1}(|b_{k+1}c^{k+1}| + \dots + |b_n c^n|) \\
&= m(1 - |b_k|^2 t^k) + Ct^{k+1},
\end{aligned}$$

où C est une constante (rappelons que $0 < t < 1$). Si m est non nul, La fonction $t \mapsto m(1 - |b_k|^2 t^k) + Ct^{k+1}$ prend des valeurs strictement négatives au voisinage de 0^+ , donc il existe des complexes ct tels que $|Q(ct)| < m$, ce qui contredit la définition de m . Donc m est nul et z_0 est racine de P . $\square$

3.6 Polynômes de Bernstein

Il ne faut pas espérer qu'une série entière converge uniformément sur tout $\mathbb{R}$, voici pourquoi.

Proposition 5. *La limite uniforme sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, d'une suite de polynômes est un polynôme.*

Démonstration : Soit (P_n) une suite de polynômes. Si elle converge uniformément sur I , elle est uniformément de Cauchy. Il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, et pour tout $x \in I$,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| < 1.$$

Le polynôme $P_n - P_{n_0}$ doit donc être borné sur I qui est non borné : ce n'est possible que s'il est constant. Donc :

$$\forall x \in I, \quad P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0).$$

Soit f la limite de la suite (P_n) .

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0).$$

$\square$

Sur un intervalle fermé borné, la situation change radicalement.

Théorème 22 (de Weierstrass). *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Ce magnifique résultat a fait l'objet de toutes sortes de démonstrations, et de généralisations (sous le nom de « Théorème de Stone-Weierstrass »). C'est un théorème d'existence, qui ne dit rien a priori sur la manière de construire la suite de polynômes qu'il affirme exister. Il se trouve qu'il est possible de construire une telle suite... en jouant tout simplement à pile ou face. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in [0, 1]$, et supposez que vous disposiez d'une pièce qui retourne « Pile » avec probabilité x . Si vous lancez la pièce n fois, le nombre de fois où vous obtenez « Pile » suit la loi binomiale de paramètres n et x : il vaut $k \in \{0, \dots, n\}$ avec probabilité :

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

La loi des grands nombres (et votre bon sens) dit que si n est grand, le nombre de fois où vous tombez sur pile divisé par n (la *fréquence*), est proche de x . En termes probabilistes, la loi de probabilité de la variable aléatoire « fréquence de Pile » converge vers la masse de Dirac en x . Donc pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Et voilà le travail ! Euh pas tout à fait quand même. La loi des grands nombres n'affirme qu'une limite simple et il reste à démontrer qu'elle est uniforme.

Démonstration : Comme entrée en matière, vérifier que la somme des probabilités de la loi binomiale vaut 1 relève de la formule du binôme (d'où le nom).

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Vous savez peut être aussi que l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, x)$ est nx et que sa variance est $nx(1-x)$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

(Oubliez les probabilités, et redémontrez directement ces formules, c'est un bon exercice).

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Elle est bornée : il existe M tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x)| < M.$$

De plus, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Pour tout ε , il existe η tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La différence entre f et son approximation d'ordre n , s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Notons cette somme Δ_n . Nous la séparons en deux, en isolant les valeurs de k telles que $\frac{k}{n}$ est proche de x :

$$K_n = \left\{ k, \left| \frac{k}{n} - x \right| < \eta \right\} \quad \text{et} \quad \overline{K_n} = \{0, \dots, n\} \setminus K_n.$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{k \in K_n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in \overline{K_n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in K_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k \in \overline{K_n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in K_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\eta^2} \sum_{k \in \overline{K_n}} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{n^2 \eta^2} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2 \eta^2} nx(1-x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{4n\eta^2}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à choisir n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $\frac{2M}{4n\eta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. □

Passer de l'intervalle $[0, 1]$ à n'importe quel intervalle fermé borné demande un simple changement de variable affine : $x \mapsto a + (b - a)x$. N'en déduisez pas pour autant que les polynômes de Bernstein soient une bonne méthode pour calculer des

approximations de fonctions. L'erreur en norme uniforme sur $[0, 1]$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui est bien plus mauvais que ce que l'on obtient avec les polynômes de Lagrange, Hermite, Legendre, ou autres.

Bonne nouvelle, nous changeons de siècle : ce qui précède est paru dans une petite note de deux pages (en français) aux Communications de la Société Mathématique de Kharkov, volume 13, année 1912/13, sous le titre « Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités ». Pourquoi Sergueï Natanovitch Bernstein (1880-1968), natif d'Odessa, écrivait-il en français à Kharkov ? D'une part parce qu'il avait fait sa thèse à Paris (Hilbert et Picard au jury tout de même...), d'autre part parce que c'était encore un temps où une grande partie des scientifiques comprenaient le français. Revenu en Russie, et malgré son parcours parisien brillant, il avait dû passer un second doctorat à Kharkov pour pouvoir y enseigner, son diplôme étranger n'étant pas reconnu.