

Déterminants

Luc Rozoy, Bernard Ycart

Les déterminants sont un outil indispensable de l'algèbre linéaire, que vous avez déjà rencontré en dimensions 2 et 3. Peu de prérequis pour ce chapitre, à part les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie, les systèmes linéaires et le calcul matriciel. Votre objectif minimal est d'apprendre les méthodes de calcul des déterminants ; comprendre en plus les raisonnements développés ici, ne peut que renforcer votre culture algébrique.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Permutations	1
1.2	Formes alternées	5
1.3	Déterminant d'un endomorphisme	12
1.4	Mineurs et cofacteurs	14
1.5	Méthodes de calcul	17
1.6	Interprétation géométrique	22
2	Entraînement	25
2.1	Vrai ou faux	25
2.2	Exercices	27
2.3	QCM	32
2.4	Devoir	35
2.5	Corrigé du devoir	38
3	Compléments	44
3.1	Les tâtonnements de Leibniz	44
3.2	L'école japonaise	45
3.3	Les excuses de Cramer	47
3.4	Cauchy raconte l'histoire	48
3.5	Le dernier honnête homme	48
3.6	La solidité des pyramides	53
3.7	Les déterminants de Sylvester	53
3.8	La condensation de Dodgson	55

1 Cours

1.1 Permutations

L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, muni de la composition des applications est le premier exemple de groupe non commutatif que vous ayez rencontré. Vous avez besoin d'en savoir un peu plus pour manipuler des déterminants. La notion importante de cette section est celle de *signature*.

Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. Nous la noterons

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple pour $n = 12$:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 5 & 3 & 7 & 2 & 12 & 11 & 10 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

est la bijection qui à 1 associe 9, à 2 associe 5, etc. On peut se demander pourquoi imposer une notation aussi redondante, puisque les images sont données par la deuxième ligne dans l'ordre de la première. La raison est que l'on réserve une notation plus simple aux *cycles*. La composition des applications est notée $\circ$, mais nous noterons s^n la composée de s avec elle-même n fois.

Définition 1. Soit s une permutation de $\mathcal{S}_n$ et i un élément de $\{1, \dots, n\}$. On appelle orbite de i pour s l'ensemble (fini) $\{s^n(i), n \in \mathbb{N}\}$.

Dans l'exemple ci-dessus, pour trouver l'orbite de 1, on calcule l'image de 1 qui est 9, puis l'image de 9 qui est 4, etc., jusqu'à retrouver 1 (qui est l'image de 11). L'orbite de 1 est donc $\{1, 9, 4, 7, 11\}$. L'orbite de 2 est $\{2, 5\}$, celle de 3 est $\{3\}$ (on dit que 3 est un *point fixe*). Observez qu'une orbite est la même pour *tous ses éléments* : l'orbite de 9, 4, 7 et 11 est aussi $\{1, 9, 4, 7, 11\}$. Le plus petit entier k tel que $s^k(x) = x$ est la *longueur* de l'orbite $\{x, s(x), s^2(x), \dots, s^{k-1}(x)\}$. Par définition, un ensemble n'est pas ordonné. Or nous aurons besoin d'un ordre pour écrire des cycles. Nous conviendrons donc d'écrire une orbite comme la *liste ordonnée* $[x, s(x), \dots, s^{k-1}(x)]$, où x est le plus petit élément de l'orbite.

Définition 2. On appelle décomposition en orbites de la permutation s la séquence d'orbites disjointes des éléments de $\{1, \dots, n\}$ pour s , écrite par ordre croissant de leurs plus petits éléments.

Un algorithme très simple produit la décomposition en orbites d'une permutation.

Tant qu'il reste des éléments de $\{1, \dots, n\}$ hors des orbites déjà écrites
choisir le plus petit de ces éléments

écrire son orbite

Fin Tant que

Dans l'exemple ci-dessus, on commencera donc par écrire l'orbite de 1 : $[1, 9, 4, 7, 11]$. Le premier élément non rangé est 2. Son orbite est $[2, 5]$. L'élément 3 n'a pas été rangé, son orbite est $[3]$. Le plus petit élément non rangé à ce stade est 6, dont l'orbite est $[6, 12, 8, 10]$. Tous les éléments ont alors été rangés, et la décomposition en orbites de s est :

$$[1, 9, 4, 7, 11], [2, 5], [3], [6, 12, 8, 10]$$

Définition 3. Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une permutation et

$$[1, \dots, s^{k_1-1}(1)], \dots, [i_h, \dots, s^{k_h-1}(i_h)]$$

sa décomposition en orbites. On appelle signature de la permutation s et on note $\varepsilon(s)$:

$$\varepsilon(s) = (-1)^{(k_1-1)+\dots+(k_h-1)},$$

où $k_1, \dots, k_h$ sont les longueurs des orbites successives dans la décomposition de s .

Toujours sur le même exemple, les longueurs des orbites successives sont 5, 2, 1, 4, la signature est donc $\varepsilon(s) = (-1)^{4+1+0+3} = +1$.

Soyons honnêtes : sachant décomposer une permutation en orbites et en déduire sa signature, vous en savez assez pour calculer des déterminants, ce qui après tout est bien le but de ce chapitre. Il serait dommage de vous en tenir là, car vous perdriez le sel algébrique du groupe des permutations. Voici le résultat principal de cette section.

Théorème 1. L'application signature, de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ est l'unique homomorphisme surjectif entre ces deux groupes.

La démonstration comporte plusieurs étapes, qui sont autant de résultats intéressants. D'abord, nous allons enrichir les orbites pour donner un sens plus précis à la notion de décomposition.

Définition 4. Soit k un entier supérieur ou égal à 2, et $i_1, \dots, i_k$ k éléments tous distincts de $\{1, \dots, n\}$. On qualifiera de cycle de longueur k et on notera $(i_1, \dots, i_k)$ la permutation σ telle que :

$$\sigma(i_1) = i_2, \quad \dots, \quad \sigma(i_{k-1}) = i_k, \quad \sigma(i_k) = i_1,$$

et pour tout $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, $\sigma(i) = i$.

L'inconvénient de cette notation est que plusieurs écritures différentes peuvent désigner le même cycle : $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 1)$ par exemple. Comme ci-dessus, nous convenons d'écrire en premier le plus petit élément du cycle. Ceci permet d'associer de manière unique un cycle à une orbite. Observez que dans la décomposition en orbites du cycle $(i_1, \dots, i_k)$ on trouve $[i_1, \dots, i_k]$, et $n - k$ points fixes. La signature du cycle $(i_1, \dots, i_k)$ est :

$$\varepsilon((i_1, \dots, i_k)) = (-1)^{k-1}.$$

Proposition 1. Soit s une permutation et

$$[1, \dots, s^{k_1-1}(1)], \dots, [i_h, \dots, s^{k_h-1}(i_h)]$$

sa décomposition en orbites. Alors s est la composée des cycles déduits des orbites de longueur ≥ 2 .

$$s = (i_1, \dots, s^{k'_1-1}(i_1)) \circ \dots \circ (i_h, \dots, s^{k'_h-1}(i_h)) , \quad k'_1, \dots, k'_h \geq 2 .$$

La vérification est immédiate. Observez que deux cycles commutent si les ensembles d'éléments qu'ils concernent sont disjoints :

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_h\} = \emptyset \implies (i_1, \dots, i_k) \circ (j_1, \dots, j_h) = (j_1, \dots, j_h) \circ (i_1, \dots, i_k)$$

Dans une décomposition en orbites, oubliez les singletons et ne conservez que les orbites de longueur au moins 2, que vous transformez en cycles : si $k_j \geq 2$, remplacez $[i_j, \dots, s^{k_j-1}(i_j)]$ par $(i_j, \dots, s^{k_j-1}(i_j))$. Enfin, remplacez les virgules dans l'énumération des orbites, par le signe de composition : votre permutation s est une composée de cycles.

$$\begin{aligned} s &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 5 & 3 & 7 & 2 & 12 & 11 & 10 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1, 9, 4, 7, 11) \circ (2, 5) \circ (6, 12, 8, 10) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 11 & 8 & 4 & 10 & 1 & 12 \end{pmatrix} \\ &\quad \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \\ &\quad \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 12 & 7 & 10 & 9 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les cycles de longueur 2 jouent un rôle particulier. On les appelle *transpositions*. Leur signature vaut -1 . Afin de faciliter la lecture, pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ nous noterons $\tau_{i,j} = (i, j)$ la transposition de i et j :

$$\tau_{i,j}(i) = j , \quad \tau_{i,j}(j) = i , \quad \tau_{i,j}(k) = k , \quad \forall k \neq i, j .$$

Proposition 2. Soit s une permutation et

$$[1, \dots, s^{k_1-1}(1)], \dots, [i_h, \dots, s^{k_h-1}(i_h)]$$

sa décomposition en orbites. Alors s est la composée de $(k_1 - 1) + \dots + (k_h - 1)$ transpositions.

Remarquez que le nombre de transpositions dans cette décomposition est exactement l'exposant de (-1) dans la définition de la signature.

Démonstration : Nous avons vu (proposition 1) que toute permutation s'écrit comme une composée de cycles. Il nous suffit de vérifier qu'un cycle de longueur k est composée de $k - 1$ transpositions. Voici une manière de décomposer le cycle $(i_1, \dots, i_k)$:

$$(i_1, \dots, i_k) = \tau_{i_1, i_k} \circ \tau_{i_1, i_{k-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1, i_2}$$

(vérifiez-le, par récurrence sur k). □

Toute permutation s'écrit donc comme un produit (au sens de la composition des applications) de transpositions. Une telle écriture n'a rien d'unique : l'ordre de deux cycles disjoints peut être changé, on peut toujours insérer deux fois la même permutation dans le produit sans changer le résultat, etc. Le miracle est que si deux produits de transpositions donnent la même permutation, alors les nombres de permutations dans ces deux produits ont la même parité : c'est une conséquence du théorème 1. Le résultat suivant est l'étape clé dans sa démonstration.

Lemme 1. *Soit s une permutation et τ une transposition. Alors :*

$$\varepsilon(\tau \circ s) = -\varepsilon(s) .$$

Démonstration : L'idée de la démonstration est de montrer que la composée par une transposition agit sur la décomposition en orbites, soit en cassant une orbite en deux, soit en regroupant deux orbites. Dans les deux cas l'exposant de la signature est soit augmenté, soit diminué de 1, et la signature est changée en son opposée.

Considérons la décomposition en orbites de s . Supposons que τ transpose les deux éléments distincts i et j et examinons la décomposition en orbites de $\tau \circ s$. De deux choses l'une : soit i et j appartiennent à la même orbite de s , soit i et j appartiennent à deux orbites distinctes.

- *Si i et j appartiennent à la même orbite de s .* Quitte à réordonner les éléments, nous pouvons supposer sans perte de généralité que l'orbite est $[1, \dots, k]$, et que les deux éléments à transposer sont 1 et j avec $1 < j \leq k$. Pour la permutation $\tau \circ s$, l'image d'un entier h est :

- ★ $s(h)$ si h est différent de $j - 1$ et k ,
- ★ 1 si $h = j - 1$,
- ★ j si $h = k$.

L'orbite $[1, \dots, k]$ est cassée en $[1, \dots, j - 1]$ et $[j, \dots, k]$. Le terme $k - 1$ dans l'exposant de la signature est remplacé par $(j - 2) + (k - j)$. L'exposant de la signature est diminué de 1, et celle-ci est changée en son opposée.

- *Si i et j appartiennent à deux orbites distinctes de s .* Quitte à réordonner les éléments, nous pouvons supposer sans perte de généralité que les deux orbites sont $[1, \dots, j - 1]$ et $[j, \dots, k]$, avec $1 < j \leq k \leq n$ et que les deux éléments à transposer sont 1 et j . Pour la permutation $\tau \circ s$, l'image d'un entier h est :
- ★ $s(h)$ si h est différent de $j - 1$ et k
- ★ j si $h = j - 1$

★ 1 si $h = k$

Les deux orbites $[1, \dots, j-1]$ et $[j, \dots, k]$ sont regroupées en une seule : $[1, \dots, k]$. Les deux termes $j-2$ et $k-j$ dans l'exposant de la signature sont remplacés par le terme $k-1$. L'exposant de la signature est augmenté de 1, et celle-ci est encore changée en son opposée.

□

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème 1.

Démonstration : Nous commençons par démontrer que la signature est un homomorphisme de groupes, de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$:

$$\forall s, s' \in \mathcal{S}_n, \quad \varepsilon(s \circ s') = \varepsilon(s) \times \varepsilon(s') .$$

Soient s et s' deux transpositions quelconques. D'après la proposition 2, s est le produit de $(k_1 - 1) + \dots + (k_h - 1)$ transpositions, où $k_1, \dots, k_h$ sont les longueurs des orbites de s . Or d'après le lemme 1, la composée d'une transposition par une permutation quelconque multiplie sa signature par (-1) . La composée de s' par $(k_1 - 1) + \dots + (k_h - 1)$ transpositions successives multiplie la signature par $(-1)^{(k_1 - 1) + \dots + (k_h - 1)} = \varepsilon(s)$, d'où le résultat.

Pour terminer la démonstration du théorème 1, nous devons démontrer l'unicité. Soit s une permutation quelconque : multiplions la transposition $\tau_{1,2}$ à droite par s^{-1} et à gauche par s : on obtient la transposition $\tau_{s(1),s(2)}$. N'importe quelle transposition se déduit donc de $\tau_{1,2}$ par une opération de ce type (on dit que les transpositions sont toutes *conjuguées*). Considérons maintenant un homomorphisme de groupe φ de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$. Comme φ est un homomorphisme de groupes,

$$\varphi(\tau_{s(1),s(2)}) = \varphi(s \circ \tau_{1,2} \circ s^{-1}) = \varphi(s)\varphi(\tau_{1,2})(\varphi(s))^{-1} = \varphi(\tau_{1,2}) .$$

Toutes les transpositions, puisqu'elles sont conjuguées, doivent avoir la même image par φ . Supposons que cette image commune soit 1. Dans la mesure où toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions (proposition 2), on obtient $\phi(s) = 1$ pour toute permutation s . Dans ce cas, l'homomorphisme ϕ est constant et donc non surjectif. Si φ est supposé surjectif, alors nécessairement l'image de toute transposition doit valoir -1 . Donc φ coïncide avec ε sur toutes les transpositions. Mais puisque toute permutation est produit de transpositions et que φ et ε sont tous les deux des homomorphismes de groupes,

$$\forall s \in \mathcal{S}_n, \quad \varphi(s) = \varepsilon(s) .$$

□

1.2 Formes alternées

Le corps de nombres de référence sera $\mathbb{R}$, mais tout ce qui suit vaut aussi pour le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.

Définition 5. On appelle forme n -linéaire alternée toute application f de E^n dans $\mathbb{R}$ telle que :

- f est n -linéaire : $\forall i = 1, \dots, n, \forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in E$ l'application partielle qui à $v \in E$ associe $f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$ est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ f(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda u + \mu v, v_{i+1}, \dots, v_n) &= \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n) \\ &\quad + \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

- f est alternée : $\forall s \in \mathcal{S}_n, \forall v_1, \dots, v_n \in E, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$:

$$f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) .$$

Une forme linéaire associe donc un réel à un n -uplet de vecteurs. Si on remplace un des n vecteurs par son produit par un réel, le résultat est multiplié par ce même réel. Si on remplace un vecteur par une somme de deux vecteurs, le résultat est la somme des deux résultats obtenus avec chacun des vecteurs (forme n -linéaire). De plus si on échange deux des n vecteurs, le résultat est opposé (forme alternée). Nous aurions aussi bien pu demander que l'image d'un n -uplet de vecteurs dans lequel deux d'entre eux sont égaux, soit nulle.

Proposition 3. Soit f une forme n -linéaire. Alors f est une forme alternée si et seulement si, pour tout n -uplet de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ et pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$,

$$v_i = v_j \implies f(v_1, \dots, v_n) = 0 .$$

Démonstration : Supposons d'abord que f soit une forme alternée :

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) .$$

Si $v_i = v_j$, le résultat doit être le même : il ne peut être que nul.

Réciproquement, si f est une forme n -linéaire :

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &\quad + f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) \\ &\quad + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &\quad + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Si l'image d'un n -uplet dans lequel deux des vecteurs sont égaux est nulle, alors la somme ci-dessus est nulle, et les deux termes dans lesquels v_i et v_j sont répétés sont également nuls. Il vient donc :

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) .$$

□

Toute forme n -linéaire alternée est explicitement déterminée par sa valeur sur une base.

Théorème 2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(v_1, \dots, v_n)$ un n -uplet de vecteurs. Pour tout $j = 1, \dots, n$, on note $(a_{i,j})_{i=1, \dots, n}$ les coordonnées de v_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i .$$

Alors :

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(e_1, \dots, e_n) \left(\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j} \right) ,$$

où $\varepsilon(s)$ désigne la signature de la permutation s .

Démonstration : Appliquons la n -linéarité à :

$$f(v_1, \dots, v_n) = f \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i \right) .$$

On obtient une somme de facteurs dont chacun est calculé en choisissant l'un des termes de la somme pour chacune des coordonnées. Un tel terme est défini par une application de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même :

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\varphi \in \{1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}}} \left(\prod_{j=1}^n a_{\varphi(j),j} \right) f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)}) .$$

Mais d'après la proposition 3, parmi les termes $f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)})$ tous ceux qui comportent deux fois le même vecteur sont nuls. Seuls peuvent être non nuls les termes correspondant à une application φ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même *injective*. Une telle application est nécessairement bijective : c'est une *permutation*.

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{j=1}^n a_{s(j),j} \right) f(e_{s(1)}, \dots, e_{s(n)}) .$$

Or toute permutation est un produit de transpositions. Chaque transposition des coordonnées change le signe, donc si une permutation s est le produit de k transpositions :

$$f(e_{s(1)}, \dots, e_{s(n)}) = (-1)^k f(e_1, \dots, e_n) .$$

Donc d'après la proposition 2 :

$$f(e_{s(1)}, \dots, e_{s(n)}) = \varepsilon(s) f(e_1, \dots, e_n) .$$

□

Le théorème 2 montre qu'une forme n -linéaire alternée est déterminée de façon unique par sa valeur sur une base de E .

Définition 6. On appelle :

1. déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme linéaire alternée f telle que $f(\mathcal{B}) = 1$; on la note $\det_{\mathcal{B}}$.
2. déterminant d'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ son déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
3. déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Voici comment s'effectuent les changements de base.

Proposition 4. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$\det_{\mathcal{B}'} = \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \right) \det_{\mathcal{B}}$$

Démonstration : Comme conséquence du théorème 2, deux formes n -linéaires alternées sont toujours proportionnelles. Il existe donc une constante λ telle que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En prenant l'image par $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$, on trouve $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ par définition. $\square$

La plupart des déterminants que vous aurez à calculer seront des déterminants d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou d'une matrice. On les note entre deux barres droites :

$$|v_1, \dots, v_n| \quad \text{ou} \quad |A|$$

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée. Le théorème 2 fournit une expression explicite de son déterminant :

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j} . \quad (1)$$

Commencez par vérifier que cette formule coïncide bien avec celles que vous connaissez en dimensions 2 et 3.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2 .$$

La *règle de Sarrus* est un moyen mnémotechnique d'appliquer la formule en dimension 3 (et en dimension 3 seulement). On réécrit les deux premières lignes du déterminant en dessous de celui-ci, puis on effectue tous les produits en diagonale. On affecte du signe + les diagonales descendantes, du signe - les diagonales montantes, et on ajoute le tout (figure 1). Par exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = +(-2) + (-12) + (+6) - (-9) - (-2) - (+8) = -5$$

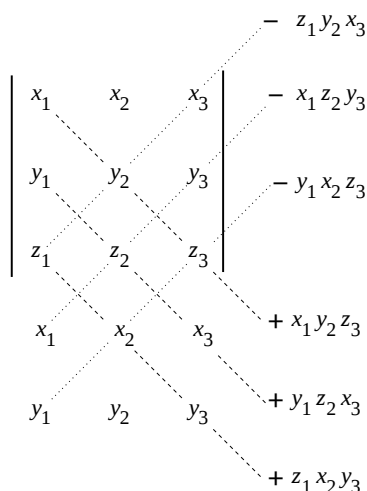


FIGURE 1 – Règle de Sarrus.

À part en dimensions 2 et 3, la formule (1) ne vous sera pas très utile, et vous ne devez surtout pas la considérer comme un algorithme de calcul : elle suppose $(n-1)(n!)$ multiplications et $n! - 1$ additions, ce qui est prohibitif. Vous devez cependant retenir les deux conséquences suivantes.

Proposition 5. *Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée.*

Démonstration : Reprenons la formule explicite.

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j} .$$

Nous pouvons réindicer le produit correspondant à la permutation s :

$$\prod_{j=1}^n a_{s(j),j} = \prod_{i=1}^n a_{i,s^{-1}(i)} .$$

De plus la signature d'une permutation est égale à celle de son inverse (car ε est un homomorphisme de groupe).

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i,s^{-1}(i)} .$$

Réindiquons alors la somme :

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{i=1}^n a_{i,s(i)} = |{}^t A| .$$

□

Proposition 6. *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.*

Démonstration : Par la proposition précédente il suffit d'examiner le cas d'une matrice triangulaire par blocs *supérieure*, c'est-à-dire du type :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \star & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{B_d} \end{pmatrix}$$

Nous souhaitons montrer que

$$|A| = |B_1| \dots |B_d| .$$

La démonstration s'effectue par récurrence sur le nombre de blocs. Si $d = 1$, il n'y a rien à démontrer. Nous affirmons qu'il suffit de démontrer la propriété pour $d = 2$. En effet, une matrice diagonale avec d blocs peut être vue comme une matrice à 2 blocs, dont l'un a lui-même $d - 1$ blocs. Si la propriété est vraie pour 2 et pour $d - 1$, elle sera vraie pour d , d'où le résultat par récurrence. Considérons donc une matrice A du type :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \star \\ 0 & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

Nous supposons donc que pour un certain entier k strictement compris entre 1 et n :

$$(i > k \text{ et } j \leq k) \implies a_{i,j} = 0 ,$$

de sorte que

$$B_1 = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,k} \quad \text{et} \quad B_2 = (a_{i,j})_{i,j=k+1,\dots,n} .$$

Utilisons à nouveau la formule explicite.

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j} .$$

Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une permutation. Le produit $\prod_{j=1}^n a_{s(j),j}$ est nul s'il existe j tel que $s(j) > k$ et $j \leq k$. Supposons que ce produit soit non nul. Alors nécessairement $j \leq k$ entraîne $s(j) \leq k$. Soit s_1 la restriction de s à $\{1, \dots, k\}$: c'est une permutation de $\{1, \dots, k\}$. Donc la restriction s_2 de s à $\{k+1, \dots, n\}$ est aussi une permutation de $\{k+1, \dots, n\}$. On a donc $s = s_1 \circ s_2$, ce qui entraîne $\varepsilon(s) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$. Le produit s'écrit alors :

$$\prod_{j=1}^n a_{s(j),j} = \prod_{j=1}^k a_{s_1(j),j} \prod_{j=k+1}^n a_{s_2(j),j} .$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$ et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des permutations de $\{k+1, \dots, n\}$. Si on le débarrasse des termes nuls, le déterminant de A devient :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{s_1 \in \mathcal{S}} \sum_{s_2 \in \mathcal{S}'} \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2) \prod_{j=1}^k a_{s_1(j),j} \prod_{j=k+1}^n a_{s_2(j),j} \\ &= \left(\sum_{s_1 \in \mathcal{S}} \varepsilon(s_1) \prod_{j=1}^k a_{s_1(j),j} \right) \left(\sum_{s_2 \in \mathcal{S}'} \varepsilon(s_2) \prod_{j=k+1}^n a_{s_2(j),j} \right) \\ &= |B_1| |B_2|. \end{aligned}$$

□

L'application la plus fréquente de la proposition 6 concerne les matrices triangulaires (n blocs de taille 1 sur la diagonale) : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Comme cas particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux, et le déterminant de la matrice identité est 1.

Vous devez également retenir les conséquences suivantes de la définition 6.

Proposition 7. *Quelle que soit la base $\mathcal{B}$,*

1. *une famille de vecteurs est liée si et seulement si son déterminant est nul ;*
2. *on ne modifie pas le déterminant si on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration :

1. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E . Dans un espace vectoriel de dimension n , si une famille de n vecteurs est libre, alors c'est une base. Par la proposition 4, le déterminant de cette base dans n'importe quelle autre est non nul. Réciproquement, si la famille est liée, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Sans perte de généralité, supposons que ce soit le dernier. En utilisant la linéarité par rapport à la dernière coordonnée :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i)$$

Or le déterminant d'une famille de vecteurs dont deux sont égaux est nul (proposition 3). La somme est donc nulle.

2. Ajoutons au dernier vecteur une combinaison linéaire des autres.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i) &= \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \\ &\quad + \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i). \end{aligned}$$

D'après le point précédent, le second déterminant est nul. D'où le résultat. $\square$

Voici l'écriture en termes de matrices, combinant la proposition précédente avec la proposition 5.

Corollaire 1.

1. *Le déterminant d'une matrice carrée de taille $n \times n$ est nul si et seulement si son rang est strictement inférieur à n .*
2. *On ne modifie pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs colonnes une combinaison linéaire des autres.*
3. *On ne modifie pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs lignes une combinaison linéaire des autres.*

1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et f un endomorphisme (application linéaire de E dans E). Le déterminant dans une base de E de l'image par f de cette même base, ne dépend pas de la base choisie.

Proposition 8. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors :*

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) .$$

Démonstration : L'application qui à un n -uplet de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ associe $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est n -linéaire et alternée. D'après le théorème 2, elle est proportionnelle à l'application $\det_{\mathcal{B}}$. Il existe donc une constante λ telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) .$$

Or par définition :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 .$$

En utilisant le cas particulier où les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont ceux de la base $\mathcal{B}$, la constante λ est nécessairement $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$. De même,

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) .$$

Mais d'après la proposition 4,

$$\det_{\mathcal{B}'} = \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \right) \det_{\mathcal{B}} .$$

Donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n)) &= \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \right) \det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \\ &= \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \right) \left(\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \right) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) . \end{aligned}$$

Mais aussi :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n)) &= \left(\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \right) \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) \\ &= \left(\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \right) \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \right) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) .$$

□

La proposition 8 permet de définir le déterminant d'un endomorphisme.

Définition 7. On appelle déterminant de l'endomorphisme f , et on note $\det(f)$ la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$, commune à toutes les bases $\mathcal{B}$.

Le déterminant de f est donc égal au déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base. De plus, si $\mathcal{B}$ est une base de E et $(v_1, \dots, v_n)$ un n -uplet quelconque de vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) .$$

Théorème 3. Soient f et g deux endomorphismes de E . Alors :

$$\det(g \circ f) = \det(g) \det(f) .$$

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Par définition du déterminant d'un endomorphisme,

$$\begin{aligned}\det(g \circ f) &= \det_{\mathcal{B}}(g(f(\mathcal{B}))) \\ &= \det(g) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \\ &= \det(g) \det(f) .\end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier où f est un automorphisme de E , son déterminant est non nul (l'image par f d'une base est une base). Sa composée avec l'application réciproque f^{-1} est l'identité, de déterminant 1. Donc :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} .$$

La traduction en termes de matrices est la suivante.

Corollaire 2.

1. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) .$$

2. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, et alors :

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

1.4 Mineurs et cofacteurs

Les *mineurs* sont les déterminants de dimensions inférieures que l'on extrait d'un déterminant initial en ne conservant que certaines lignes et colonnes.

Définition 8. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée. Soit k un entier compris entre 1 et n . Soient l et c deux applications injectives de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On appelle mineur d'ordre k du déterminant $|A|$, associé aux lignes $(l(i))_{i=1,\dots,k}$ et aux colonnes $(c(j))_{j=1,\dots,k}$, le déterminant :

$$|(a_{l(i),c(j)})_{i,j=1,\dots,k}| .$$

Le mineur d'ordre 2 extrait d'un déterminant d'ordre 4 pour $l(1) = 1, l(2) = 3, c(1) = 2, c(2) = 4$ est $\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} :$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \boxed{a_{1,2}} & a_{1,3} & \boxed{a_{1,4}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & \boxed{a_{3,2}} & a_{3,3} & \boxed{a_{3,4}} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} .$$

Nous savons déjà qu'une famille de vecteurs est libre si et seulement si son déterminant est non nul (proposition 7), ou bien qu'une matrice est de rang maximal si et seulement si son déterminant est non nul (corollaire 1). Les mineurs permettent de déterminer exactement le rang d'une matrice quand il n'est pas maximal.

Proposition 9. Soit A une matrice de taille $n \times n$. La matrice A est de rang $r < n$ si et seulement si :

1. il existe un mineur d'ordre r non nul et
2. tous les mineurs d'ordre $r + 1$ sont nuls.

Démonstration : Il est équivalent de démontrer que le rang de A est strictement inférieur à r si et seulement si tous les mineurs d'ordre r sont nuls.

Si le rang de A est strictement inférieur à r , alors toute famille de r vecteurs colonnes est liée. Considérons une famille de r vecteurs colonnes de A , et supposons qu'elle soit liée.

Au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : sans perte de généralité, nous pouvons supposer que c'est le dernier. Considérons un mineur d'ordre r extrait de A , en choisissant les r colonnes de la famille considérée, et r lignes quelconques. Dans ce mineur, la dernière colonne est combinaison linéaire des autres et donc le mineur est nul. Ce qui précède vaut pour toute famille de r vecteurs colonnes, donc tous les mineurs d'ordre r sont nuls.

Nous montrons ensuite la contraposée de l'implication réciproque. Si le rang de A est supérieur ou égal à r alors il existe une famille libre de r vecteurs colonnes. Choisissons r vecteurs colonnes formant une famille libre, et considérons la matrice $n \times r$ de ces r vecteurs colonnes, qui est donc de rang r . Les vecteurs lignes forment une matrice de n vecteurs de $\mathbb{R}^r$. Or une matrice et sa transposée ont même rang. La famille des n vecteurs lignes est encore de rang r . On peut donc en extraire une famille libre de r vecteurs. Les coordonnées de ces r vecteurs forment une matrice $r \times r$ de rang r , extraite de la matrice A . Son déterminant est un mineur de taille r et il est non nul. $\square$

Les mineurs d'ordre $n - 1$ jouent un rôle particulier : affectés de signes alternés, ce sont les *cofacteurs*.

Définition 9. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n . On appelle cofacteur d'indices i et j et on note $A_{i,j}$ le produit par $(-1)^{i+j}$ du mineur d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} |(a_{h,k})_{h \neq i, k \neq j}|.$$

La matrice des cofacteurs est appelée comatrice de A et notée $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Une première utilisation des cofacteurs est le développement suivant une ligne ou une colonne.

Proposition 10. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n .

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k} = \sum_{h=1}^n a_{h,j} A_{h,j}.$$

Démonstration : Comme le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, il suffit de démontrer pour le développement selon la j -ième colonne. Cette j -ième colonne est le vecteur $(a_{h,j})$, qui s'écrit $\sum_h a_{h,j} e_h$, où les e_h sont les vecteurs de la base canonique. Par la n -linéarité, il suffit de démontrer que le cofacteur $A_{h,j}$ est le déterminant obtenu en remplaçant la j -ième colonne de A par le vecteur e_h , dont la h -ième coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles. Considérons cette nouvelle matrice. Appliquons aux lignes le cycle $(1, \dots, h)$, dont la signature est $(-1)^{h-1}$. Appliquons ensuite aux colonnes le cycle $(1, \dots, j)$, dont la signature est $(-1)^{j-1}$. On obtient une matrice

diagonale par blocs : la première colonne est le vecteur (e_1) . D'après la proposition 6, le déterminant est le produit des déterminants des deux blocs diagonaux. Le premier est $|1|$. Le second est le déterminant du mineur extrait de A en supprimant la ligne h et la colonne j . Pour tenir compte des permutations effectuées sur les lignes et colonnes, il convient de le multiplier par $(-1)^{h-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{h+j}$: on obtient bien le cofacteur $A_{h,j}$. $\square$

Proposition 11. *Pour toute matrice A de taille n ,*

$$A {}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A} A = |A| I_n ,$$

où $\tilde{A}$ est la comatrice de A , ${}^t\tilde{A}$ sa transposée, et I_n la matrice identité.

Démonstration : Pour $i, j = 1, \dots, n$, le coefficient d'indices i, j du produit $A {}^t\tilde{A}$ est :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k} .$$

Le coefficient d'indices i, j du produit ${}^t\tilde{A} A$ est :

$$\sum_{h=1}^n A_{h,i} a_{h,j} .$$

Pour $i = j$, nous avons déjà vérifié dans la proposition précédente que ces coefficients valent $|A|$. Il reste à montrer qu'ils sont nuls pour $i \neq j$. Nous avons vu dans la démonstration précédente, que le cofacteur $A_{h,i}$ est égal au déterminant de la matrice $n \times n$ déduite de A en remplaçant la i -ième colonne de A par le vecteur e_h , dont la h -ième coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles. Par la n linéarité, $\sum_{h=1}^n A_{h,i} a_{h,j}$ est le déterminant déduit de A en remplaçant la i -ième colonne par la j -ième. Mais alors, la i -ième colonne et la j -ième sont identiques, donc le déterminant est nul. On obtient l'autre résultat en échangeant le rôle des lignes et des colonnes (proposition 5). $\square$

Dans le cas où le déterminant de A est non nul, la proposition 11 fournit une expression explicite de son inverse.

Corollaire 3. *Soit A une matrice carrée inversible. L'inverse de A est :*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\tilde{A} .$$

On obtient même une résolution explicite du système $Ax = b$: ce sont les *formules de Cramer*.

Corollaire 4. *Soit A une matrice carrée inversible. Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Notons $A_{b,j}$ la matrice déduite de A en remplaçant la j -ième colonne par b . Soit $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ la solution du système $Ax = b$. Alors :*

$$\forall j = 1, \dots, n , \quad x_j = \frac{|A_{b,j}|}{|A|} .$$

Démonstration : Le vecteur x est le produit $A^{-1}b$. En utilisant l'expression de A^{-1} en fonction de la comatrice,

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n A_{i,j} b_i .$$

Utilisons à nouveau l'interprétation du cofacteur $A_{i,j}$ comme le déterminant déduit de A en remplaçant la j -ième colonne par e_i : la somme $\sum_{i=1}^n A_{i,j} b_i$ est bien le déterminant de $A_{b,j}$. $\square$

Et pour terminer, la mauvaise nouvelle : aucun des résultats de cette section n'est algorithmiquement utile ! Pour calculer le rang d'une matrice, il est beaucoup plus rapide d'appliquer la méthode du pivot de Gauss (le rang est le nombre de pivots non nuls) que de calculer les mineurs. Pour calculer l'inverse d'une matrice, la méthode du pivot de Gauss est encore la plus efficace (et de loin !) comparée à la comatrice. Et pour résoudre un système linéaire ? Toujours le pivot de Gauss, plutôt que les formules de Cramer. Mais au fait quel est le meilleur algorithme pour calculer un déterminant ? Ben justement : le pivot de Gauss.

1.5 Méthodes de calcul

Nous commençons par extraire des sections précédentes les résultats les plus utiles pour le calcul pratique.

- (R1) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.
- (R2) On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes).
- (R3) Si on multiplie une ligne ou une colonne par une constante, le déterminant est multiplié par cette même constante.
- (R4) On peut développer un déterminant selon ou une ligne ou une colonne, grâce aux formules

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k} = \sum_{h=1}^n a_{h,j} A_{h,j} ,$$

où les $A_{i,j}$ sont les cofacteurs.

Attention, il faut appliquer ces résultats *un par un* et pas simultanément ; en particulier, il convient d'éviter d'ajouter en même temps des combinaisons linéaires à plusieurs lignes ou colonnes, ce qui engendre souvent des erreurs. On ne se lance jamais dans le développement selon ou une ligne ou une colonne, avant d'avoir utilisé les résultats précédents, pour « faire apparaître des zéros ».

La méthode algorithmique, sans astuce donc conseillée, est la méthode du pivot de Gauss, qui procède par transformations successives pour faire apparaître des zéros sous la diagonale. Une petite pique de rappel sur un exemple n'est peut-être pas superflue.

Considérons la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient d'indices $(1, 1)$ est non nul, il n'y a donc pas de permutations à effectuer. Le premier pivot est $p_1 = 1$. Voici les transformations qui annulent la première colonne au-dessous du pivot.

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le second pivot est -1 . Les transformations qui annulent le bas de la seconde colonne sont les suivantes.

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un troisième pivot non nul, il faut échanger les deux dernières colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième pivot est -2 . Il ne reste qu'une ligne à transformer.

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Constatez qu'à chaque étape de la méthode, les transformations consistent à :

1. ajouter à une ligne un multiple d'une autre, ce qui ne change pas le déterminant ;
2. permuter deux lignes ou deux colonnes, ce qui change le déterminant en son opposé.

La matrice obtenue au bout du compte est triangulaire ; son déterminant est le produit des coefficients diagonaux. Pour en déduire le déterminant initial, il suffit de compter le nombre de permutations de lignes ou de colonnes, et de changer le signe si ce nombre est impair. Au bilan, le nombre d'opérations nécessaire au calcul d'un déterminant d'ordre

n par la méthode du pivot de Gauss est équivalent à $\frac{2}{3}n^3$, ce qui est incomparablement plus rapide que les $n(n!)$ opérations de la formule explicite.

Nous illustrons maintenant les méthodes de calcul sur quelques exemples classiques.

Proposition 12. *Le déterminant*

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

est :

$$D(a_1, \dots, a_n) = (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right).$$

Démonstration : La somme des éléments de chaque ligne vaut $\sum_{i=1}^n a_i$. On commence donc par ajouter toutes les colonnes à la première, puis on met $\sum_{i=1}^n a_i$ en facteur.

$$D(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

On conserve la première ligne, puis on retranche chaque ligne à la suivante :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

On développe alors suivant la première colonne :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & -a_n \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est celui d'une matrice triangulaire : il est le produit des éléments de la diagonale. $\square$

Proposition 13. *Le déterminant (dit « de Vandermonde »)*

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) .$$

Démonstration : Considérons le polynôme de degré $n - 1$ qui a pour racines $a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} c_j X^j .$$

Ajoutons à la dernière colonne la première multipliée par c_0 , la seconde multipliée par c_1 , etc. Par définition de P , ceci va annuler les éléments de la dernière colonne, sauf le dernier :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & P(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe suivant la dernière colonne,

$$D(a_1, \dots, a_n) = P(a_n) D(a_1, \dots, a_{n-1}) .$$

Or $P(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$: d'où le résultat, par récurrence.

Voici une autre démonstration. Le déterminant $D(a_1, \dots, a_n)$ est un polynôme en $a_1, \dots, a_n$. Le développement selon une ligne quelconque, montre que c'est un polynôme de degré $n - 1$ en chacune des variables. Or il s'annule dès que deux d'entre elles sont égales (puisqu'alors deux lignes coïncident). Donc $D(a_1, \dots, a_n)$ est un multiple du produit de toutes les différences $(a_j - a_i)$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Or ces deux polynômes sont de même degré en chacune des variables. Il ne reste donc qu'à déterminer la constante de proportionnalité. Pour cela, examinons le terme en a_n^{n-1} : il est égal au mineur d'indices (n, n) , qui est $D(a_1, \dots, a_{n-1})$, affecté du signe $+$ comme tous les mineurs diagonaux. Par récurrence, le coefficient de proportionnalité cherché est donc 1. $\square$

Proposition 14. *Le déterminant (dit « circulant »)*

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

est :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\theta_k) ,$$

où P est le polynôme

$$P(X) = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1} ,$$

et les θ_k sont les racines n -ièmes de l'unité :

$$\forall k = 0, \dots, n-1 , \quad \theta_k = e^{i(2\pi k/n)} .$$

Démonstration : Notons A la matrice proposée. Soit θ une racine n -ième de l'unité (quelconque). Considérons le vecteur (colonne) $v(\theta) = (\theta^k)_{k=0, \dots, n-1}$, et multiplions à droite la matrice A par $v(\theta)$. La première coordonnée du produit est

$$a_1 + a_2\theta + \dots + a_n\theta^{n-1} = P(\theta) .$$

La seconde coordonnée est :

$$a_n + a_1\theta_1 + \dots + a_{n-1}\theta_{k-1} = \theta P(\theta) .$$

On vérifie de même, que pour $i = 1, \dots, n$, la i -ième coordonnée est $\theta^{i-1}P(\theta)$. Donc $Av(\theta) = P(\theta)v(\theta)$.

Considérons maintenant la famille de vecteurs $(v(\theta_0), \dots, v(\theta_{n-1}))$. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde de la proposition précédente : les θ_i étant tous différents, il est non nul. Donc la famille de vecteurs est une base. Notons-la $\mathcal{B}$. Soit f l'endomorphisme qui a pour matrice A dans la base canonique. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $P(\theta_0), \dots, P(\theta_{n-1})$: son déterminant est le produit $\prod_{k=0}^{n-1} P(\theta_k)$. Or le déterminant de f est le même quelle que soit la base dans laquelle on écrit sa matrice. D'où le résultat. $\square$

Proposition 15. *Le déterminant*

$$D(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

est :

$$D(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = (-1)^n (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0) .$$

La matrice pour $x = 0$ est la *matrice compagne* du polynôme ci-dessus : vous comprendrez pourquoi quand vous étudierez la réduction des endomorphismes.

Démonstration : Pour $n = 1$, la formule donne $D(a_{n-1}, x) = -(x - a_{n-1})$, elle est donc correcte. Développons suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} D(a_0, \dots, a_{n-1}, x) &= (-x) \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -x & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-x)D(a_1, \dots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1} a_0 . \end{aligned}$$

Si $D(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = (-1)^{n-1} (x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \dots - a_1x - a_0)$, alors l'expression ci-dessus donne bien

$$D(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = (-1)^n (x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0) ,$$

d'où le résultat, par récurrence. □

1.6 Interprétation géométrique

Vous savez sans doute déjà qu'en géométrie plane, l'aire d'un parallélogramme est au signe près le déterminant des deux vecteurs qui l'engendrent. C'est vrai en dimension quelconque.

Définition 10. Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $(v_1, \dots, v_n)$ un n -uplet de vecteurs de E . On appelle parallélépipède engendré par $(v_1, \dots, v_n)$ l'ensemble :

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \} .$$

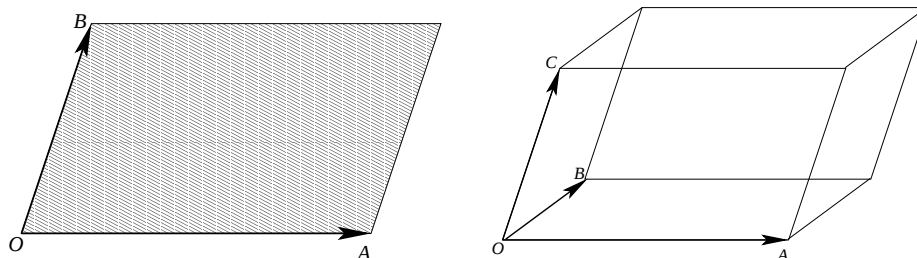


FIGURE 2 – Parallélépipèdes en dimension 2 et 3.

En dimension 2, c'est un parallélogramme, en dimension 3 un parallélépipède ordinaire (figure 2).

Pour définir une mesure, il faut un étalon qui en donne l'unité. Dans $\mathbb{R}^n$, on convient que le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs de la base canonique est 1. Dans un espace vectoriel E , on peut choisir une base $\mathcal{B}$ quelconque, et décider que le volume du parallélépipède qu'elle engendre vaut 1.

Une fois fixé l'étalon, comment calculer le volume des autres parallélépipèdes, c'est-à-dire définir une application VP qui à un n -uplet $(v_1, \dots, v_n)$ associe le volume du parallélépipède $P(v_1, \dots, v_n)$?

$$\begin{array}{ccc} & VP & \\ E^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & VP(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

Voici trois propriétés « physiquement raisonnables ».

(P1) Si on remplace un vecteur par la somme de deux autres, le volume est la somme des deux volumes.

$$VP(v_1, \dots, v + v', \dots, v_n) = VP(v_1, \dots, v, \dots, v_n) + VP(v_1, \dots, v', \dots, v_n) .$$

(P2) Si on multiplie un des vecteurs par un réel, le volume doit être multiplié par ce même réel.

$$VP(v_1, \dots, \lambda v, \dots, v_n) = \lambda VP(v_1, \dots, v, \dots, v_n)$$

(P3) Si deux des vecteurs sont identiques, alors le volume est nul.

$$VP(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0 .$$

La propriété (P1) est facile à admettre. Pensez à deux boîtes posées l'une sur l'autre : elles ont une face en commun et la pile forme un nouveau parallélépipède, dont le volume est bien la somme des volumes des deux boîtes. Attention, si vous l'admettez pour $v + v'$, vous devez l'admettre aussi pour $v - v'$; et si on peut soustraire deux volumes, alors un volume peut être négatif. Effectivement, le volume ici est muni d'un

signe. La valeur absolue est la mesure au sens ordinaire, le signe traduit l'*orientation* du n -uplet de vecteurs. La propriété (P2) est elle aussi assez naturelle : si vous étirez un parallélépipède dans une direction, vous multipliez son volume. Mais surtout, elle est (presque) une conséquence de (P1) : en effet, pour tout λ entier, puis *rationnel*, (P2) se déduit de (P1). Il suffit alors de faire l'hypothèse que les applications partielles sont continues au voisinage de 0 pour en déduire la propriété pour tout λ *réel*. La propriété (P3) est aussi très naturelle : si deux des vecteurs qui engendrent le parallélépipède sont identiques, celui-ci est « aplati », c'est-à-dire qu'il est inclus dans un hyperplan. Étant inclus dans un sous-espace de dimension inférieure, son volume n -dimensionnel est nul.

Maintenant, relisez la section 1.2, en particulier la définition 6 et la proposition 3. L'application VP , si elle vérifie les propriétés (P1), (P2) et (P3), est une forme multilinéaire alternée. Si de plus $VP(\mathcal{B}) = 1$, alors VP est le *déterminant dans la base* $\mathcal{B}$. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est tel que $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ est non nul, alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E . La valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède engendré, au sens ordinaire. Son signe est positif si la nouvelle base a la même orientation que l'ancienne, négatif dans le cas contraire.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. La signature de la permutation proposée est $+1$: vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
3. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
4. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
7. ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Vrai-Faux 2. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 4 vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^4$. On note $\det$ le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si $v_2 = -v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$.
2. ☐ Si $v_3 = -2v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -2$.
3. ☐ $\det(v_1, v_3, v_4, v_2) = -\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
4. ☒ $\det(v_1, 2v_2, 3v_4, 4v_4) = 24 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
5. ☐ $\det(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = 2 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
6. ☒ $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
7. ☒ $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
8. ☐ $\det(3v_1 + v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
9. ☒ $\det(2v_1 + v_3, v_2, v_3, 2v_4 - v_2) = 4 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$

Vrai-Faux 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un n -uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si on remplace l'un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres le déterminant est inchangé.

2. ☐ Si on soustrait au premier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est inchangé.
3. ☒ Si on soustrait le premier vecteur à chacun des autres, le déterminant est inchangé.
4. ☒ Si on multiplie les deux premiers vecteurs par -1 , le déterminant est inchangé.
5. ☐ Si on multiplie chacun des vecteurs par 2, le déterminant est multiplié par 2^n .
6. ☒ Si on ajoute au dernier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est multiplié par 2.
7. ☒ Si on échange deux des vecteurs, le déterminant est changé en son opposé.

Vrai-Faux 4. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ ($n \geq 2$). Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $|A| = |{}^tA|$
2. ☐ $|2A| = 2|A|$
3. ☒ $|-A| = (-1)^n |A|$
4. ☐ $|A + {}^tA| = 2|A|$
5. ☒ Si A est diagonale, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
6. ☒ Si A est triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
7. ☐ Si A est diagonale par blocs, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
8. ☒ Si une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $|A| = 0$.
9. ☒ Si on ajoute à la première ligne de A une combinaison linéaire des autres, le déterminant est inchangé.
10. ☐ Si on soustrait de la dernière ligne de A la somme de toutes les lignes, le déterminant est inchangé.

Vrai-Faux 5. Soient r et n deux entiers tels que $1 \leq r < n$. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
2. ☐ A est de rang r si et seulement si au moins un des mineurs d'ordre r est non nul.
3. ☐ Si A est de rang r alors tous les mineurs d'ordre r sont non nuls.
4. ☒ Si A est de rang r alors tous les mineurs d'ordre $r + 1$ sont nuls.
5. ☒ Si tous les mineurs d'ordre r sont nuls, alors A est de rang strictement inférieur à r .
6. ☐ S'il existe un mineur d'ordre r non nul, alors A est de rang r
7. ☒ S'il existe un mineur d'ordre r non nul, alors A est de rang au moins r

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour $n = 3$, puis $n = 4$:

1. Écrire toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$
2. Écrire la décomposition en orbites de chaque permutation
3. En déduire une décomposition en produit de cycles, puis en produit de permutations.
4. Calculer la signature.

Exercice 2. On considère les éléments suivants de $\mathcal{S}_{10}$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 3 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 2 & 6 & 9 & 4 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} ; \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 4 & 10 & 5 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 6 & 10 & 2 & 4 & 1 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} ; \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 7 & 4 & 3 & 9 & 5 & 10 & 1 & 6 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} ; \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix} ; \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & 6 & 10 & 4 & 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 10 & 9 & 8 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Pour chacune de ces permutations :

1. Écrire sa décomposition en orbites.
2. En déduire sa signature.
3. Calculer la composée de $\tau_{1,2} \circ s$. Écrire sa décomposition en orbites et vérifier que $\varepsilon(\tau_{1,2} \circ s) = -\varepsilon(s)$.
4. Calculer la composée de $s \circ \tau_{1,2}$. Écrire sa décomposition en orbites et vérifier que $\varepsilon(s \circ \tau_{1,2}) = -\varepsilon(s)$.

Exercice 3. Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une permutation. On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des $\frac{n(n-1)}{2}$ paires d'éléments de $\{1, \dots, n\}$. On définit la quantité :

$$\pi(s) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{s(i) - s(j)}{i - j} .$$

1. Montrer que $\pi(s) = \pm 1$.
2. Soient $s, s' \in \mathcal{S}_n$ deux permutations. Montrer que $\pi(s \circ s') = \pi(s)\pi(s')$.

3. Soit $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ une paire d'éléments de $\{1, \dots, n\}$. On dit que la paire $\{i, j\}$ est *en inversion* pour la permutation s si $i < j$ et $s(i) > s(j)$. Montrer que $\pi(s)$ est égal à $+1$ si le nombre de paires en inversion est pair, -1 s'il est impair.
4. Montrer que si s est une transposition, alors $\pi(s) = -1$.
5. Dédurre de ce qui précède que l'application $s \mapsto \pi(s)$ coïncide avec la signature.

Exercice 4. Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une permutation. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On définit l'endomorphisme f_s de $\mathbb{R}^n$, par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad f_s(v_j) = v_{s(i)}.$$

Montrer que le déterminant de f_s est égal à la signature de s .

Exercice 5. Calculer chacun des déterminants suivants :

1. par la règle de Sarrus,
2. en développant selon la première colonne,
3. en développant selon la seconde ligne,
4. par la méthode du pivot de Gauss.
5. Quelle méthode est la plus rapide ?

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 6. Calculer chacun des déterminants suivants :

1. en développant selon la première colonne,
2. en développant selon la seconde ligne,
3. par la méthode du pivot de Gauss.
4. Quelle méthode est la plus rapide ?

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 7. Factoriser les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) \\ 1 & \cos(\beta) & \cos(2\beta) \\ 1 & \cos(\gamma) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} .$$

Exercice 8. Factoriser les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} .$$

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ un entier, et A une matrice carrée de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent ± 1 . Montrer que le déterminant de A est un entier divisible par 2^{n-1} . Indication : faire apparaître des zéros dans la première colonne.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$ un entier et a un réel. Pour chacun des déterminants d'ordre n suivants :

1. Calculer D_2, D_3 .
2. Établir une formule de récurrence reliant D_n et D_{n-1} .
3. En déduire l'expression de D_n en fonction de n et a .

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \ddots & \ddots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & a & a^2 \\ a^{n-2} & \ddots & \dots & a & 1 & a \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & \dots & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & a^n \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a & a^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 11.

1. Soient a, b, c, d quatre fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $a_1(x), \dots, a_n(x)$ n fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dont chaque coordonnée est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit f la fonction qui à x associe $\det(a_1(x), \dots, a_n(x))$. Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i(x), a_{i+1}(x), \dots, a_n(x)).$$

3. Soient x, α, β trois réels. On considère le déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x + \alpha) & \sin(x + \alpha) \\ 1 & \cos(x + \beta) & \sin(x + \beta) \end{vmatrix}.$$

Montrer que c'est une fonction constante de x et calculer cette constante.

Exercice 12. Soit $n \geq 2$ un entier. Soient A, B, C, D quatre matrices de taille $n \times n$. On note Δ le déterminant d'ordre $2n$ suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & C \\ B & A \end{vmatrix}.$$

2. Dans le cas particulier où A est la matrice nulle. Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^n \det(B) \det(C) .$$

3. Dans le cas particulier $C = B$ et $D = A$. Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B) \det(A-B) .$$

4. On suppose que C et D commutent ($CD = DC$) et que D est inversible. Montrer que $\Delta = \det(AD - BC)$. Indication : multiplier à droite par la matrice $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I \end{pmatrix}$.
5. On suppose toujours que C et D commutent, mais on ne suppose plus que D est inversible. Pour tout x réel, on note D_x la matrice $xI + D$, et Δ_x le déterminant obtenu en remplaçant D par D_x dans Δ . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_x = \det(AD_x - BC)$. En déduire que $\Delta = \det(AD - BC)$.
6. Montrer que si A et C commutent, alors $\Delta = \det(AD - CB)$.
7. Montrer que si B et D commutent, alors $\Delta = \det(DA - BC)$.
8. Montrer que si A et B commutent, alors $\Delta = \det(DA - CB)$.
9. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si c'est le cas, quel est son inverse ?
10. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} I & B \\ B & I \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si c'est le cas, quel est son inverse ?

Exercice 13. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$, à coefficients réels.

- Montrer que $\det(A+iB)$ et $\det(A-iB)$ sont deux nombres complexes conjugués.
- On suppose que A et B commutent ($AB = BA$). Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
- Vérifier que les deux matrices suivantes A et B suivantes ne commutent pas et calculer $\det(A^2 + B^2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 14. Soit n un entier ≥ 2 . Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. Montrer que la comatrice $\tilde{A}$ est aussi triangulaire.

Exercice 15. Soit n un entier ≥ 2 . Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On note $\tilde{A}$ la comatrice de A .

1. On suppose que A est inversible. Quel est le déterminant de $\tilde{A}$? Montrer que la comatrice de $\tilde{A}$ est $(\det(A))^{n-2} A$.
2. On suppose que le rang de A est inférieur ou égal à $n - 2$. Montrer que $\tilde{A}$ est la matrice nulle.
3. On suppose que le rang de A est égal à $n - 1$. Montrer que le rang de $\tilde{A}$ est 1.

Exercice 16. Soient a, b, c, d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\det(d, b, c) a + \det(a, d, c) b + \det(a, b, d) c = \det(a, b, c) d.$$

Indication : considérer le système $ax + by + cz = d$.

Exercice 17. Déterminer le rang des matrices suivantes,

1. par la méthode des mineurs,
2. par l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Déterminer en fonction du paramètre a le rang des matrices suivantes,

1. par la méthode des mineurs,
2. par l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & a & a & a \\ a & 2 & a & a \\ a & a & 2 & a \\ a & a & a & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 1 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & a+1 & a \\ a & 2a & 1 & 1 \\ a+1 & a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. La signature de la permutation proposée est +1.

- ☐ A $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
☐ B $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
☐ C $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
☐ D $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
☐ E $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Question 2. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 4 vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^4$. On note $\det$ le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- ☐ A $\det(2v_1 + 3v_2, v_2, v_3, v_4) = 6 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
☐ B Si $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$
☐ C $\det(2v_1 + 3v_2, v_2, v_3, 2v_4 - 3v_3) = 4 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
☐ D $\det(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1) = 4 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$
☐ E $\det(v_1 + v_2, v_2 - v_1, v_3 + v_4, v_3 - v_4) = 2 \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$

Question 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un n -uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- ☐ A Si on remplace le premier vecteur par la somme de tous les autres, le déterminant est inchangé.
☐ B Si on soustrait au dernier vecteur la somme de tous les autres, le déterminant est inchangé.
☐ C Si on multiplie par 3 chacun des vecteurs, le déterminant est multiplié par 3.
☐ D Si on ajoute au dernier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est inchangé.
☐ E Si on soustrait au premier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant s'annule.

Question 4. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ ($n \geq 2$).

- ☐ A $|{}^t A| = (-1)^n |A|$
☐ B Si A est triangulaire par blocs, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
☐ C Si on ajoute à la première ligne de A la somme de toutes les autres, le déterminant est inchangé.
☐ D Si une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $|A| = 0$.
☐ E Si on ajoute à la première ligne le double de la seconde, le déterminant est doublé.

Question 5. Soient r et n deux entiers tels que $1 \leq r < n$. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

- ☐ A est de rang n si et seulement si son déterminant est non nul.
☐ A est de rang r si et seulement si tous les mineurs d'ordre r sont non nuls.
☐ Si A est de rang strictement supérieur à r alors tous les mineurs d'ordre r sont non nuls.
☐ Si au moins un des mineurs d'ordre r est non nul, alors A est de rang au moins égal à r .
☐ Si tous les mineurs d'ordre r sont nuls, alors A est de rang $r - 1$.

Question 6. On considère le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

- ☐ En développant selon la première colonne, $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
☐ En développant selon la dernière ligne, $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$
☐ En remplaçant la troisième ligne par la première moins la troisième :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

☐ En permutant les colonnes : $D = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
☐ Par la règle de Sarrus : $D = 0 + 0 + 4 - 3 - 4 + 0$

Question 7. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + 2z = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

On note D le déterminant du système.

- ☐ $x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
☐ $y = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
☐ $z = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
☐ $x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\boxed{\text{E}} \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Question 8. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice de taille $n \times n$ ($n \geq 2$). Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $A_{i,j}$ le cofacteur d'indices i et j .

- ☐ A Si $i \neq j$ alors $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{k,j} = 0$
- ☐ B $\sum_{k=1}^n A_{i,k} a_{k,i} = |A|$
- ☐ C Si $i \neq j$ alors $\sum_{k=1}^n A_{i,k} a_{j,k} = 0$
- ☐ D $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k} = |A|$
- ☐ E Si $i \neq j$ alors $\sum_{k=1}^n a_{k,i} A_{i,k} = 0$

Question 9. Soit a et b deux réels. On considère le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$.

- ☐ A D est un polynôme de degré 3 en b
- ☐ B D est nul si et seulement si $a = b$
- ☐ C Si $a = 2b$, alors $D = 0$
- ☐ D $D = (a + 2b)(a - b)$
- ☐ E D est multiple de $(a - b)^2$.

Question 10. Soient a, b, c trois réels. On considère le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

- ☐ A D est un polynôme de degré 2 en a
- ☐ B Si $a = -b$ alors $D = 0$
- ☐ C Si $a = 1$ alors $D = 0$
- ☐ D $a^2 - b^2$ divise D
- ☐ E $D = (a - b)(b - c)(c - a)$

Réponses : 1-AD 2-BC 3-BE 4-CD 5-AD 6-BE 7-AB 2-AE 9-CD 10-AE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec

le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit n un entier et $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice de taille $n \times n$.

1. Donner l'expression du déterminant de A en fonction de ses coefficients.
2. Démontrer que le déterminant de la transposée de A est égal au déterminant de A .
3. Donner la définition des cofacteurs de A .
4. Soit r un entier tel que $1 \leq r < n$. Démontrer que si le rang de A est strictement inférieur à r alors tous les mineurs d'ordre r de A sont nuls.
5. Démontrer que si le rang de A est supérieur ou égal à r alors il existe un mineur d'ordre r non nul.

Exercice 1 : Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $a, b, x_1, \dots, x_n$ des réels. On note A la matrice de taille $n \times n$ dont la diagonale est $(x_1, \dots, x_n)$, les termes au-dessus sont tous égaux à a , les termes au-dessous tous égaux à b .

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & a & \dots & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & x_n \end{pmatrix}.$$

1. Dans le cas particulier où $a = b$ et tous les x_i sont égaux à x , montrer que $\det(A) = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.
2. On note J la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1. Dans le cas général, montrer que le polynôme $\det(A + XJ)$ est de degré 1 en X .
3. Calculer $\det(A - aJ)$ et $\det(A - bJ)$.
4. On suppose $a \neq b$. Montrer que

$$\det(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a},$$

où P désigne le polynôme $P(X) = (x_1 - X) \dots (x_n - X)$.

5. En déduire que pour $a = b$, $\det(A) = P(a) - aP'(a)$.

Exercice 2 : Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux éléments de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$\forall i, j = 1, \dots, n, \quad a_i + b_j \neq 0.$$

On appelle *matrice de Cauchy* et on note A_n la matrice de taille $n \times n$ dont le coefficient d'indices (i, j) est $\frac{1}{a_i + b_j}$. On note D_n son déterminant.

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que si

$$\exists i \neq j, \quad a_i = a_j \text{ ou } b_i = b_j,$$

alors $D_n = 0$.

2. Montrer que

$$D_n = \frac{1}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_1+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_2+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n+b_1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{a_n+b_2}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

3. Montrer que

$$D_n = \frac{1}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_n-a_2}{a_2+b_1} & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n-a_2}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_1} & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

4. Montrer que

$$D_n = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

5. Montrer que

$$D_n = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \times$$

$$\begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_1 + b_2)(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1 + b_{n-1})(a_1 + b_n)} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{b_n - b_1}{(a_2 + b_1)(a_2 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_2 + b_2)(a_2 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_2 + b_{n-1})(a_2 + b_n)} & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_{n-1} + b_1)(a_{n-1} + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_{n-1} + b_2)(a_{n-1} + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_{n-1} + b_{n-1})(a_{n-1} + b_n)} & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Montrer que

$$D_n = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \cdots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)(a_1 + b_n) \cdots (a_{n-1} + b_n)} D_{n-1}.$$

7. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

8. On note $C_{i,j}$ le cofacteur d'indices (i, j) de la matrice A_n . On suppose que $D_n \neq 0$. Montrer que

$$\frac{C_{i,j}}{D_n} = \frac{(a_i + b_j) \prod_{k \neq i} (a_i + b_k) \prod_{h \neq j} (a_h + b_j)}{\prod_{k \neq i} (a_i - a_k) \prod_{h \neq j} (b_j - b_h)}.$$

9. La *matrice de Hilbert* est le cas particulier de matrice Cauchy obtenu pour $a_i = i$ et $b_j = j - 1$. Pour $n = 4$, écrire la matrice de Hilbert et calculer son déterminant.

10. Calculer l'inverse de la matrice de Hilbert pour $n = 4$.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. L'expression du déterminant de A en fonction de ses coefficients est

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j},$$

où $\varepsilon(s)$ désigne la *signature* de la permutation s .

2. Reprenons la formule de la question précédente.

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^n a_{s(j),j} .$$

Nous pouvons réindicer le produit correspondant à la permutation s :

$$\prod_{j=1}^n a_{s(j),j} = \prod_{i=1}^n a_{i,s^{-1}(i)} .$$

De plus la signature d'une permutation est égale à celle de son inverse (car ε est un homomorphisme de groupe).

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i,s^{-1}(i)} .$$

Réindiquons alors la somme :

$$|A| = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(s) \prod_{i=1}^n a_{i,s(i)} = |{}^t A| .$$

3. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n . On appelle *cofacteur* d'indices i et j et on note $A_{i,j}$ le produit par $(-1)^{i+j}$ du mineur d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} |(a_{h,k})_{h \neq i, k \neq j}| .$$

4. Considérons une famille de r vecteurs colonnes de A , et supposons qu'elle soit liée. Au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : sans perte de généralité, nous pouvons supposer que c'est le dernier. Considérons un mineur d'ordre r extrait de A , en choisissant les r colonnes de la famille considérée, et r lignes quelconques. Dans ce mineur, la dernière colonne est combinaison linéaire des autres et donc le mineur est nul. Ce qui précède vaut pour toute famille de r vecteurs colonnes, donc tous les mineurs d'ordre r sont nuls.

5. Si le rang de A est supérieur ou égal à r alors il existe une famille libre de r vecteurs colonnes. Choisissons r vecteurs colonnes formant une famille libre, et considérons la matrice $n \times r$ de ces r vecteurs colonnes, qui est donc de rang r . Les vecteurs lignes forment une matrice de n vecteurs de $\mathbb{R}^r$. Or une matrice et sa transposée ont même rang. La famille des n vecteurs lignes est encore de rang r . On peut donc en extraire une famille libre de r vecteurs. Les coordonnées de ces r vecteurs forment une matrice $r \times r$ de rang r , extraite de la matrice A . Son déterminant est un mineur de taille r et il est non nul.

Exercice 1 :

1. Nous devons calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \dots & \dots & a \\ a & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & x \end{vmatrix}.$$

La somme des éléments de chaque ligne est égale à $x + (n-1)a$. Ajoutons les colonnes d'indices 2 à n à la première, et mettons $x + (n-1)a$ en facteur.

$$D = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & \dots & a \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 1 & a & \dots & a & x \end{vmatrix}.$$

Soustrayons alors la première ligne de chacune des autres.

$$D = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x-a \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux, donc $D = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

2. On ne change pas la valeur de $\det(A + XJ)$ si on soustrait la première ligne à chacune des autres. Si on fait cela, le terme en X disparaît des lignes d'indices 2 à n , et la première ligne reste $(x_1 + X, a + X, \dots, a + X)$. En développant suivant la première ligne :

$$\det(A + XJ) = (x_1 + X)B_{1,1} + (a + X) \sum_{j=2}^n B_{1,j},$$

où les $B_{i,j}$ sont des cofacteurs extraits des lignes 2 à n , qui ne contiennent donc pas X . D'où le résultat.

3. Les matrices $A - aJ$ et $A - bJ$ sont diagonales. Leur déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

$$\det(A - aJ) = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \quad \text{et} \quad \det(A - bJ) = \prod_{i=1}^n (x_i - b).$$

4. D'après la question 2, $\det(A - XJ)$ est un polynôme de degré 1 en X , disons $\alpha X + \beta$, où α et β sont deux réels. Par la question précédente, nous connaissons sa valeur en $-a$ et $-b$:

$$-\alpha a + \beta = \prod_{i=1}^n (x_i - a) \quad \text{et} \quad -\alpha b + \beta = \prod_{i=1}^n (x_i - b)$$

Le déterminant de A est la valeur de ce polynôme en $X = 0$, à savoir β . En éliminant α entre les deux équations on obtient : $\beta(b - a) = bP(a) - aP(b)$, où P désigne le polynôme $P(X) = (x_1 - X) \dots (x_n - X)$. Si $a \neq b$,

$$\beta = \det(A) = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a},$$

5. Pour $a, x_1, \dots, x_n$ fixés, la fonction qui à b associe $\det(A)$ est une fonction polynomiale, donc continue. Sa valeur en $b = a$ est la limite de l'expression trouvée à question précédente lorsque b tend vers a .

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{(b - a)P(a) - a(P(b) - P(a))}{b - a} = P(a) - aP'(a).$$

Exercice 2 :

- Si $a_i = a_j$, les deux lignes d'indices i et j sont identiques, donc le déterminant est nul. De même, si $b_i = b_j$, les deux colonnes d'indices i et j sont identiques et le déterminant est nul.
- Si on multiplie la j -ième colonne du déterminant par $a_n + b_j$, le déterminant est multiplié par $a_n + b_j$, ce qui donne le résultat annoncé.
- Le coefficient d'indices (i, j) trouvé à la question précédente est :

$$\frac{a_n + b_j}{a_i + b_j} = \frac{a_n - a_i + a_i + b_j}{a_i + b_j} = \frac{a_n - a_i}{a_i + b_j} + 1.$$

On vérifie donc le résultat annoncé en soustrayant la dernière ligne aux précédentes.

- Dans le déterminant de la question précédente, on peut mettre en facteur $(a_n - a_i)$ dans tous les termes de la i -ième ligne, ce qui conduit au résultat demandé.
- Dans le déterminant de la question précédente, soustrayons la dernière colonne à chacune des précédentes. Pour $i, j = 1, \dots, n - 1$, le terme d'indices (i, j) devient :

$$\frac{1}{a_i + b_j} - \frac{1}{a_i + b_n} = \frac{a_i + b_n - a_i - b_j}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)} = \frac{b_n - b_j}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)},$$

d'où le résultat.

6. Dans le déterminant de la question précédente, le terme $(b_n - b_j)$ est en facteur dans tous les coefficients de la j -ième colonne, et le terme $\frac{1}{a_i + b_n}$ est en facteur dans tous les termes de la i -ième ligne. Donc :

$$D_n = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \cdots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)(a_1 + b_n) \cdots (a_{n-1} + b_n)} \times$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Or si on développe ce dernier déterminant selon la dernière ligne, on trouve le déterminant de Cauchy d'ordre $n - 1$, correspondant aux vecteurs $(a_1, \dots, a_{n-1})$ et $(b_1, \dots, b_{n-1})$, noté D_{n-1} .

7. Pour $n = 1$, $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$. Supposons la formule vraie pour D_{n-1} . D'après la question précédente,

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < n} (a_n - a_i)(b_n - b_i)}{\prod_{1 \leq i \leq n} (a_n + b_i)(a_i + b_n)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)},$$

soit

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

8. Le cofacteur d'indices (i, j) de la matrice A_n est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j . Ce faisant, on obtient la matrice de Cauchy de taille $n - 1 \times n - 1$, associée aux vecteurs

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad \text{et} \quad (b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n).$$

Le cofacteur est donné par la formule de la question précédente, dont on supprime tous les facteurs contenant a_i et tous les facteurs contenant b_j , et que l'on multiplie par $(-1)^{i+j}$. Le rapport $\frac{C_{i,j}}{D_n}$ ne conserve donc que les facteurs contenant a_i et b_j . Les termes en $a_i - a_k$ sont affectés du signe $+$ si $k < i$, $-$ si $k > i$, idem pour les termes en $b_j - b_h$. D'où le résultat.

9. Pour $n = 4$, la matrice de Hilbert est :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

D'après la question 7, son déterminant est

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{6048000}.$$

10. En utilisant le résultat de la question 8, on obtient :

$$H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}.$$

3 Compléments

3.1 Les tâtonnements de Leibniz

S'il y a bien un fil directeur dans l'œuvre foisonnante de Leibniz (1646–1716), c'est son souci constant d'améliorer l'« art d'inventer ». Pour lui, il convient avant tout de désencombrer l'esprit du savant de tout ce qui peut être automatisé. D'où en particulier les recherches que Leibniz mènera toute sa vie sur les calculateurs mécaniques. En outre, Leibniz était parfaitement conscient de l'importance d'un choix judicieux de notations, permettant d'automatiser les calculs avec des symboles. Il appelle cela l'« art caractéristique », (du choix des caractères), lui-même soumis à l'art combinatoire (de combiner ces caractères)¹. Ce thème était déjà présent dès sa thèse, écrite en 1666 à l'âge de 20 ans : il y inventait un « alphabet de la pensée humaine ». Ce souci d'automatiser les procédures par un choix de notations judicieux l'a conduit pour le calcul différentiel, à définir celles que vous utilisez encore. Le même souci préside encore à ses travaux sur la résolution de systèmes linéaires, et la détermination de solutions communes aux équations algébriques. C'est ainsi qu'il est amené au fil des années à développer les déterminants. Il n'est pas l'auteur de la théorie complète, mais plutôt d'un ensemble de règles empiriques non démontrées, qui préfigurent néanmoins les propriétés que vous avez apprises dans ce chapitre. D'ailleurs il n'existe pas de traité publié par Leibniz sur les déterminants. Seulement un corpus de manuscrits et de lettres en latin, adressées à quelques uns de ses 1100 correspondants recensés. Pourquoi un tel intérêt pour les systèmes linéaires ? Leibniz pensait que n'importe quelle résolution d'équation (algébrique, différentielle ou autre) pouvait se ramener à la résolution d'un système linéaire. Au vu des méthodes numériques développées depuis deux siècles, c'était singulièrement prémonitoire !

Dans le cadre de son « art caractéristique », Leibniz inventa plus cinquante manières d'utiliser des nombres fictifs ; deux seulement furent publiées. Voici une de ses façons d'écrire une équation linéaire quelconque :

$$10 + 11x + 12y = 0 .$$

Comprenez : $a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}y = 0$, ou bien $ax + by = c$: que préférez-vous ? Paradoxalement, ces multiples choix de notations pour les systèmes linéaires, le fait de ne pas distinguer premier et second membre, semblent l'avoir handicapé plutôt qu'aidé dans ses lents tâtonnements vers la définition du déterminant. Ayant perçu assez tôt que les quantités qui apparaissaient dans les solutions de systèmes linéaires étaient des sommes de produits de coefficients, il a mis très longtemps à dégager la règle de l'alternance de signe. Il entrevoit cette règle dès 1678.

Ainsi nous avons une règle de laquelle la valeur d'une inconnue linéaire peut être écrite sans aucun calcul.

1. M. Eberhard Knobloch : Déterminants et élimination chez Leibniz, *Revue d'Histoire des Sciences*, 54(2), pp. 143–164 (2001)

C'était trop optimiste. Son heuristique ne se généralise pas encore. Prudent, il écrit :

Ce théorème méritait d'être démontré exactement, ce qui se ferait par cette subtile analyse-là qui prescrit les lois au calcul même sans calcul.

Voici la règle des signes en 1683.

Soit un terme quelconque positif ou négatif : les termes qui se distinguent de ce terme par un nombre pair de coefficients sont affectés du signe opposé. Ceux qui se distinguent par un nombre impair de coefficients sont affectés du même signe.

Encore une autre, la même année :

Les membres qui n'ont qu'un seul coefficient commun ou un nombre impair de tels coefficients ont des signes opposés. Ceux qui ont deux ou un nombre pair de coefficients communs ont le même signe.

Ce n'est toujours pas ça : Leibniz essaie de deviner le résultat en décortiquant les systèmes 2×2 et 3×3 qu'il résout, mais la généralisation n'est pas évidente. Petit à petit, il parvient à dégager la notion de permutation des indices.

Les permutations des indices droits ont le même signe si elles résultent l'une de l'autre par un changement cyclique. Les autres permutations ont un signe opposé.

Enfin en 1684, il tient son succès.

Dans cette tentative, j'ai résolu le problème tandis qu'auparavant j'avais toujours essuyé un échec. Voici un exemple insigne de l'art combinatoire.

La règle qu'il énonce alors est bien la bonne :

Deux termes qui se distinguent l'un de l'autre seulement par un nombre impair de transpositions des indices gauches ou droits ont des signes opposés. Ceux qui se distinguent l'un de l'autre par un nombre pair ont le même signe.

S'il a fallu autant de temps à Leibniz pour comprendre comment développer un déterminant, peut-être n'est-ce pas si évident ?

3.2 L'école japonaise

Les *Neuf Chapitres de l'art du Calcul* ont joué pour les mathématiques en extrême-orient, le rôle des éléments d'Euclide pour les mathématiques occidentales. Ce livre de problèmes écrit en Chine dans les premiers siècles de notre ère, contient en particulier des problèmes d'équations et la résolution des systèmes linéaires. Ainsi, des siècles plus tard, les systèmes d'équations étaient toujours pour les mathématiciens japonais une source d'inspiration. Il n'est donc pas surprenant qu'eux-aussi aient, comme les mathématiciens européens, dégagé la notion de déterminant des méthodes de résolution d'équations. Plus surprenant est le fait que les deux découvertes ont été quasiment

simultanées. Le premier déterminant a été écrit au Japon par Seki Takakazu (ou Seki Kowa) (1642–1708)^{2 3}. L'ouvrage dans lequel la notion apparaît est daté de 1683, mais il est probable que son auteur travaillait sur les problèmes d'élimination depuis plusieurs années. Ce que d'autres ne manquaient pas de lui reprocher.

Il existe aujourd'hui dans notre pays, des mathématiciens qui connaissent « l'égalisation » mais qui, par goût du secret ou par réelle ignorance, nul ne sait, ne la révèlent pas. Si bien que nous ne la trouvons dans aucun livre. Celle-ci va être divulguée par l'école de Nakanishi pour apaiser les esprits. Désormais les trésors de la résolution des problèmes de mathématiques se trouveront réunis dans le seul *Recueil d'égalisations*.

Un des élèves de Takakazu se charge de riposter.

Ces temps derniers, des mathématiciens de la capitale et de la province se sont mis, soit par ignorance de la subtilité des procédures de Seki, soit parce qu'ils suspectent ce dernier de camoufler son ignorance des procédures, à le mettre à l'essai en lui soumettant des problèmes de même nature [que ceux de Sawagushi] ou à l'accuser de s'être trompé dans les procédures, dévoilant ainsi leur propre incompetence.

Mais la meilleure manière de répondre est encore de publier.

Déplorant que, parmi le très grand nombre d'ouvrages chinois et japonais consacrés aux mathématiques, il n'y en ait aucun qui ait pénétré le sens profond du *shakusa*, les trois *samourai* [Seki et les deux frères Takebe] tinrent conseil, puis, à partir de l'été de la troisième année de Tenna [1683], se mirent à rédiger sous la conduite de Katahiro l'essentiel des nouveaux résultats que chacun avait obtenus, firent le point sur les méthodes léguées, anciennes et récentes ; le tout fut rassemblé au milieu des années Genroku [1688-1703]. Il y avait au total douze livres, auxquels le nom de *Sanpô taisei* [traité accompli de mathématiques] fut donné et que [Katahiro] commença à mettre au propre.

Seki Takakazu a été la figure de proue des mathématiques japonaises de l'époque Edo, et ses connaissances attiraient de nombreux disciples.

Jeune homme (à l'âge de seize ans), il [Kataaki] se tourna avec son frère cadet Katahiro vers les mathématiques. Ils avaient abordé cet art avec une grande détermination et s'étaient plongés dans les ouvrages chinois et japonais ; et, bien qu'ils en eussent éclairci le contenu, ils ne parvenaient pas à saisir le principe (*ri*) des résolutions de problèmes (*kainan*). Ils entendirent à cette époque que les mathématiques de Seki Shinzuke Takakazu (vassal du seigneur de Kôfu, Tsunashige) dépassaient de loin ce qui se faisait

2. A. Horiuchi : Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo 1600-1868 *Librairie Philosophique Vrin* (1994)

3. Y. Mikami : On the Japanese theory of determinants, *Isis*, 2(1), pp. 9–36 (1914)

dans le monde. Les deux frères le choisirent comme maître et étudièrent auprès de lui ; ils s'intéressèrent également à la science calendérique et à l'astronomie, y travaillèrent jour et nuit en oubliant le boire et le manger, et œuvrèrent patiemment pour explorer la Voie qui gouverne les principes des procédures.

Mais ce n'était pas la seule école de mathématiques au Japon. Et si la quasi-coïncidence de la découverte du déterminant par Takakazu et Leibniz est étonnante, le parallèle entre les controverses de savants en Europe et au Japon ne l'est pas moins.

3.3 Les excuses de Cramer

Il n'a fallu que trois pages à Gabriel Cramer (1704–1752) pour passer à la postérité. Ces trois pages constituent la première partie de l'Appendice de son livre « Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques », qui en comprend près de 700. Après avoir donné la solution générale d'un système linéaire de dimensions 1, 2 et 3, il poursuit :

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n , on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. . .

Pas de doute, ce sont bien les formules de Cramer qu'il décrit. Ce n'est qu'une « Règle » marginale dans un ensemble monumental. Voici ce qu'il en dit dans la préface.

L'Appendice contient trois Démonstrations qui auraient trop interrompu la suite du Discours si on les avait insérées où elles sont citées. Il n'y a proprement que celle du N^o. 2. qui soit nécessaire.

Pourtant le succès fut quasi immédiat. Gergonne raconte :

Cette méthode fut tellement en faveur, que les examens aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle ; on était admis ou rejeté suivant qu'on la possédait bien ou mal.

Cramer aurait été le premier surpris d'apprendre d'où vient sa célébrité. Il n'en aura pas eu le temps : il semble que le travail excessif qu'il a fourni pour écrire ce monument soit à l'origine de la dégradation brutale de sa santé, et à son décès à seulement 48 ans. Quant à l'ampleur de l'ouvrage, il ne « vous en fera point d'excuses ».

Tel est le plan que je me suis proposé dans cet essai. C'est à mes Lecteurs à juger si je l'ai rempli. J'ai tant de grâces à leur demander, que je ne leur ferai point d'excuses, ni sur le style, où je n'ai cherché que la clarté ; ni sur certains détails, que j'ai crû nécessaires aux jeunes Géomètres en faveur desquels j'écris ; ni sur la longueur de cet Ouvrage, dont je suis moi-même surpris. Elle vient principalement du nombre d'Exemples que j'apporte pour illustrer les Règles que je donne. Je sens fort bien que les Savants en voudraient moins, mais en échange les Commencants en désireraient peut-être

davantage. Je puis dire aux uns, que je ne crois pas avoir placé un seul Exemple sans quelque raison particulière ; & j'ose assurer les autres que je ne pense pas qu'ils trouvent dans les Règles aucune difficulté qui ne soit éclaircie par quelque Exemple.

3.4 Cauchy raconte l'histoire

Dans quel domaine des mathématiques connues au début du XIX^e siècle Cauchy (1789–1857) n'a-t-il pas laissé sa trace ? Euh... je n'en connais pas ! Les déterminants, sont le sujet de l'un de ses premiers travaux : « Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment ». Soixante dix neuf pages magistrales écrites en 1812 et parues au Journal de l'École Polytechnique en 1815. La première partie, « Fonctions symétriques alternées » débute comme ce chapitre : décomposition d'une permutation en cycles, en produits de transpositions, etc. Cauchy en vient ensuite au vif du sujet. Comme il commence par brosser un historique du domaine, tant vaut en profiter. Remarquez qu'il ne cite ni Takakazu (nous l'excuserons), ni Leibniz ; mais Laplace, Vandermonde et Bézout ne semblaient pas non plus conscient de ces travaux, réalisés plus d'un siècle auparavant, mais peu diffusés.

Je vais maintenant examiner particulièrement une certaine espèce de fonctions symétriques alternées qui s'offrent d'elles-mêmes dans un grand nombre de recherches analytiques. C'est au moyen de ces fonctions qu'on exprime les valeurs générales des inconnues que renferment plusieurs équations du premier degré. Elles se représentent toutes les fois qu'on a des équations de condition à former, ainsi que dans la théorie générale de l'élimination. MM. Laplace et Vandermonde les ont considérées sous ce rapport dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1772) et M. Bézout les a encore examinées depuis sous le même point de vue dans sa *Théorie des équations*. M. Gauss s'en est servi avec avantage dans ses *Recherches analytiques* pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire des polynômes du second degré à deux ou à plusieurs variables, et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de *déterminants*. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats ; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de *résultantes* à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, *déterminant* et *résultante* devront être regardées comme synonymes.

3.5 Le dernier honnête homme

Dans la correspondance de Lagrange, considéré comme le plus grand mathématicien de la fin du XVIII^e, on trouve des appréciations extrêmement louangeuses sur Alexandre

Théophile Vandermonde (1735–1796). Voici quelques extraits.

M. de Vandermonde me paraît un très grand analyste, et j'ai été très enchanté de son travail sur les équations. Ce que vous me dites de son caractère augmente encore mon estime pour lui, et le désir que j'ai de mériter la sienne.

[...]

Je vous prie de remercier de ma part M. de Vandermonde de la lettre dont il m'a honoré. Les théorèmes qu'elle contient sont très beaux ; et je ne puis assez admirer avec combien de sagacité il traite ces sortes de matières si difficiles et si compliquées. Tout ce que j'ai vu de lui jusqu'ici me donne l'idée d'un génie bien rare, et je le crois destiné à faire les plus grandes découvertes dans l'Analyse.

[...]

Le Mémoire de M. de Vandermonde sur l'élimination m'a surtout frappé. Tout ce qui sort de sa plume me plaît singulièrement ; j'y trouve un air de simplicité, de généralité et d'originalité qui m'enchant.

Pourtant quand Lebesgue expose en 1937 ses vues sur l'œuvre mathématique de Vandermonde, l'appréciation est plus mitigée.

La grande notoriété n'est assurée en Mathématiques qu'aux noms associés à une méthode, à un théorème, à une notation. Peu importe d'ailleurs que l'attribution soit fondée ou non, et le nom de Vandermonde serait ignoré de l'immense majorité des mathématiciens si on ne lui avait attribué ce déterminant que vous connaissez bien, et qui n'est pas de lui !

[...]

Vandermonde n'a pas senti l'importance de ses propres recherches, faute d'y avoir suffisamment réfléchi. S'il eut réellement du génie et dépassa son époque, ses travaux ne peuvent néanmoins être compris qu'à la lumière des recherches contemporaines de Lagrange, et postérieures de Gauss, Abel ou Galois.

Et Lebesgue d'expliquer que la fausse attribution à Vandermonde de ce fameux déterminant est une méprise due à sa convention d'écriture des indices.

Un retour aux sources s'impose. Dans son « Mémoire sur l'élimination » de 1772, le moins que l'on puisse dire est que les notations ne sont pas faciles. Voici comment il commence.

Je suppose que l'on représente par $1, \overset{2}{1}, \overset{3}{1}, \&c. \overset{1}{2}, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}, \&c. \overset{1}{3}, \overset{2}{3}, \overset{3}{3}, \&c.$ autant de différentes quantités générales, dont l'une quelconque soit $\overset{\alpha}{a}$, une autre quelconque soit $\overset{\beta}{b}$, &c. & que le produit des deux soit désigné à l'ordinaire par $\overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b}$. Des deux nombres ordinaux α & a , le premier, par exemple,

désignera de quelle équation est pris le coefficient $\overset{\alpha}{a}$, & le second désignera le rang que tient ce coefficient dans l'équation, comme on le verra ci-après.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\frac{\alpha}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| = \overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} - \overset{\beta}{b} \cdot \overset{\alpha}{a}$$

$$\frac{\alpha}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \left| \frac{\gamma}{c} \right| = \overset{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \left| \frac{\gamma}{c} \right| + \overset{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\alpha}{a} \right| + \overset{\gamma}{c} \cdot \frac{\alpha}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right|$$

$$\frac{\alpha}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \left| \frac{\gamma}{c} \right| \left| \frac{\delta}{d} \right| = \overset{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \left| \frac{\gamma}{c} \right| \left| \frac{\delta}{d} \right| - \overset{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \left| \frac{\delta}{d} \right| \left| \frac{\alpha}{a} \right| + \overset{\gamma}{c} \cdot \frac{\delta}{d} \left| \frac{\alpha}{a} \right| \left| \frac{\beta}{b} \right| - \overset{\delta}{d} \cdot \frac{\alpha}{a} \left| \frac{\beta}{b} \right| \left| \frac{\gamma}{c} \right|$$

[...]

... Inutile d'en reproduire plus, vous aurez compris d'une part que Vandermonde est bien décidé à traiter par sa notation des déterminants tout à fait généraux, d'autre part que ce ne sera pas de la tarte de comprendre ce qu'il veut dire. De fait, une fois franchi l'obstacle des notations, le mémoire contient bien une définition des déterminants par récurrence, et l'énoncé de leurs principales propriétés, ... mais pas le déterminant de Vandermonde. Du moins en apparence.

Voici comment Cauchy, dans son mémoire de 1815, présente les déterminants.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ plusieurs quantités différentes en nombre égal à n . On a fait voir ci-dessus que, en multipliant le produit de ces quantités ou

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

par le produit de leurs différences respectives, ou par

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

on obtenait pour résultat la fonction symétrique alternée

$$S(\pm a_1 a_2^2 \dots a_n^n)$$

qui, par conséquent, se trouve toujours être égale au produit

$$a_1 a_2 \dots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) .$$

Supposons maintenant que l'on développe ce dernier produit et que, dans chaque terme du développement, on remplace l'exposant de chaque lettre par un second indice égal à l'exposant dont il s'agit : en écrivant, par exemple, $a_{r,i}$ au lieu de a_r^i et $a_{i,r}$ au lieu de a_i^r , on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n) ,$$

sera représentée par

$$S(\pm a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}) ,$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de *déterminants*.

[...]

Supposons ces quantités disposées en carré, comme on vient de le voir, sur un nombre égal à n de lignes horizontales et sur autant de colonnes verticales, de manière que, des deux indices qui affectent chaque quantité, le premier varie seul dans chaque colonne verticale et que le second varie seul dans chaque ligne horizontale, l'ensemble des quantités dont il s'agit formera un système que j'appellerai *système symétrique* de l'ordre n .

[...]

Pour obtenir le déterminant du système (1) il suffit, comme on l'a dit ci-dessus, de remplacer les exposants des lettres par des indices dans le développement du produit

$$a_1 a_2 \dots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) .$$

Il existe donc bien une *méthode*, consistant à écrire un « déterminant de Vandermonde » à n variables comme un produit de facteurs, pour ensuite faire descendre les exposants de chacune des variables en indices. Pour $n = 3$:

$$abc(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3 - cb^2a^3 - ac^2b^3 - ba^2c^3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} ,$$

tandis que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 .$$

Cauchy utilise abondamment cette méthode pour démontrer les propriétés des déterminants, et la préconise comme méthode de calcul, dans son cours d'Analyse de l'École Polytechnique. L'algèbre linéaire étant encore inconnue, il fallait bien se débrouiller autrement ! Loin d'être un exemple particulier (comme nous vous l'avons présenté), le déterminant de Vandermonde était donc un moyen commode d'écrire les déterminants généraux et d'étudier leurs propriétés. Vandermonde en était-il conscient ? Voici ce qu'il dit dans son mémoire sur l'élimination (c'est nous qui soulignons).

Ceux qui ont connaissance des symboles abrégés que j'ai nommés *types partiels de combinaison* dans mon *Mémoire sur la résolution des équations*, reconnaîtront ici la formation du *type partiel* dépendant du second degré,

pour un nombre quelconque de lettres ; ils verront sans peine qu'en prenant ici nos α , β , γ , δ , &c. par exemple, pour des exposants, tous les termes de même signe, dans le développement de l'une de nos abréviations ; seront aussi le développement du *type partiel* dépendant du second degré, & formé d'un pareil nombre de lettres ; ce que démontrent nos opérations précédentes.

Le *Mémoire sur la résolution des équations*, publié l'année précédente, a été lu à l'académie en novembre 1770, soit 2 mois seulement avant celui sur l'élimination. Vandermonde y introduit une classification des fonctions symétriques, qu'il appelle « types partiels ». Or que trouve-t-on à la page 4 de ce mémoire, à l'occasion d'un exemple ? « Or $(a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b)$, qui égale $(a - b)(a - c)(b - c)$ a pour carré... ».

Au vu des textes, les conclusions suivantes nous semblent s'imposer.

1. Il n'y aucune méprise due à la convention d'écriture des indices ; il a au contraire une méthode reconnue comme telle, consistant à échanger le rôle des indices et des exposants, afin de tirer parti de la factorisation du déterminant de Vandermonde. Cauchy en fait un usage important, tant dans son mémoire de 1812, que dans son cours d'analyse de l'école Polytechnique de 1821.
2. Vandermonde était parfaitement conscient de cette méthode, puisqu'il le dit explicitement dans le mémoire sur l'élimination, et qu'il donne la factorisation dans le mémoire sur la résolution des équations.
3. Même si Cauchy a véritablement développé la théorie, et tiré toutes les conséquences de la méthode, il est juste de donner le nom de Vandermonde à la fois au déterminant et à la méthode.

Pourquoi alors la place de Vandermonde dans l'Histoire est-elle si étriquée ? Il ne semble pas avoir aimé attirer l'attention. L'astronome suédois Lexell écrivait en 1780⁴ :

M. Vandermonde passe pour être un homme de talent, quoiqu'il n'en a pas la mine. Sa manière de s'exprimer n'est pas trop claire. Il est petit et son front ne passerait jamais pour le front d'un mathématicien.

Comme on dit dans ces cas-là : Napoléon aussi était petit. La modestie de Vandermonde le conduisait à s'effacer volontiers, plutôt que de rentrer dans ces polémiques qui ont toujours émaillé les relations entre savants. Le mémoire sur l'élimination mentionne :

Ce mémoire a été lu pour la première fois à l'Académie le 12 janvier 1771. Il contenait différentes choses que j'ai supprimées ici, parce qu'elles ont été publiées depuis par d'autres géomètres.

L'autre géomètre dont il s'agit est Laplace, dont le mémoire, publié dans le même volume, n'allait pas aussi loin sur le plan théorique que celui de Vandermonde. Même s'il a été justement reconnu comme le fondateur de la théorie des déterminants, son activité

4. A. Birembaut : L'Académie royale des Sciences en 1780 vue par l'astronome suédois Lexell (1740–1784) *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, 10(2), pp. 148–166 (1957)

mathématique réduite (seulement 3 ans) ne lui a pas laissé le temps de développer une œuvre d'envergure. Qu'a-t-il donc fait d'autre ? Ami de Vaucanson, Lavoisier et Berthollet, Vandermonde s'intéressa au moins autant à la mécanique (il a dirigé le Conservatoire National des Arts et Métiers) ou à la chimie, qu'aux mathématiques. Mais aussi à la musique, et sur la fin de sa vie à l'économie politique⁵. À ce tournant de siècle où les scientifiques commençaient à se spécialiser de plus en plus, peut-être Vandermonde a-t-il souffert d'être un des derniers touche-à-tout, un « honnête homme » comme on disait au siècle des lumières.

3.6 La solidité des pyramides

L'interprétation d'un déterminant comme un volume est attribuée à Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). Voici ce qu'il écrit dans « Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice », paru aux « Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin », en 1773.

Imaginons maintenant une pyramide triangulaire qui ait ses quatre angles, l'un au centre des coordonnées, les autres aux points M , M' , M'' , il n'est pas difficile de prouver que la solidité de cette pyramide sera exprimée par les coordonnées $x, y, z, x', y', z', \dots$ de cette manière.

$$\frac{z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')}{6},$$

[...]

Ainsi cette quantité sera nulle toutes les fois que la pyramide en question s'évanouira, ce qui arrive lorsque les trois points M , M' , M'' sont dans un même plan passant par le centre des coordonnées.

3.7 Les déterminants de Sylvester

Pour Takakazu, comme pour Leibniz, Cramer ou Vandermonde, la résolution d'un système linéaire n'était qu'un cas particulier du problème général de l'élimination des variables entre des équations polynomiales. Il consiste à trouver des solutions communes à un système d'équations polynomiales à plusieurs variables. Le système est linéaire si les degrés des polynômes en chacune des variables est 1. L'autre cas particulier facile est celui où il n'y a qu'une variable et deux équations polynomiales. Il s'agit donc de déterminer une racine commune à deux polynômes, disons

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m.$$

5. J. Hecht : Un exemple de multidisciplinarité : Alexandre Vandermonde (1735–1796), *Population*, 4, pp. 641–676 (1971)

Quelle condition doivent satisfaire les coefficients pour que P et Q aient une racine commune ? Commençons par former la *matrice de Sylvester*, $S(P, Q)$, en écrivant $m+n$ colonnes obtenues en répétant de façon décalée les deux vecteurs de coefficients. Pour $n = 2$ et $m = 3$:

$$S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

Théorème 4. *Le degré du pgcd de P et Q et le rang de la matrice $S(P, Q)$ sont liés par :*

$$\deg \text{pgcd}(P, Q) = n + m - \text{rang } S(P, Q) .$$

Vous pouvez démontrer vous-mêmes ce résultat : il suffit de comprendre quel est le rapport entre l'arithmétique des polynômes et le noyau de la matrice de Sylvester. Notons R le pgcd de P et Q et supposons qu'il soit de degré supérieur ou égal à 1. Notons A et B les quotients de P et Q par R : ils sont tels que $P = AR$ et $Q = BR$, donc $BP - AQ = 0$. Les polynômes A et B sont de degrés au plus $n - 1$ et $m - 1$. Écrivons :

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \quad \text{et} \quad B = \beta_0 + \beta_1 X + \cdots + \beta_{m-1} X^{m-1} .$$

Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^{n+m}$ obtenu en concaténant les coefficients de B puis de $-A$.

$$v = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, -\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}) .$$

Convainquez-vous que le produit de la matrice $S(P, Q)$ par le vecteur colonne v est le vecteur des coefficients de $BP - AQ$. Le reste devrait être facile.

Le déterminant de la matrice de Sylvester s'appelait au début le résultant. Il était déjà implicitement présent chez Takakazu comme chez Leibniz, et avait été explicité par Euler, puis Bézout. Pourquoi donc lui a-t-on donné le nom de James Joseph Sylvester (1814–1897) ?

Certainement pas à l'initiative de ses étudiants de l'Université de Virginie. Il était pourtant prévenu : en tant que juif, et anglais de surcroît, il n'allait pas être facilement accepté par les « White Anglo-Saxon Protestants » de l'état esclavagiste qu'était encore la Virginie d'avant la guerre de sécession (l'histoire se déroule début 1842).⁶

Unless Sylvester is content to sink into a mere cypher, and submit to all sorts of imposition from the students, he will have difficulties. They will try

6. L. S. Feuer : America's First Jewish Professor : James Joseph Sylvester at the University of Virginia, *American Jewish Archives* 36, p.151-201 (1984)

him, and when they do so, he will [...] commit some sort of blunder, and compromise his dignity in some way. I reckon our London cockney knows about as much about Virginian manners and character as a horse would about differential calculus.

Effectivement, la provocation des étudiants et la gaffe de Sylvester ne s'étaient pas faites attendre.

The cause of his sudden abandonment of the University of Virginia is often related by the Rev. R.L. Dabney, as follows : In Sylvester's class were a pair of brothers, stupid and excruciatingly pompous. When Sylvester pointed out the blunders made in a recitation by the younger of the pair, this individual felt his honor and family pride aggrieved, and sent word to Professor Sylvester that he must apologize or be chastised.

Sylvester bought a sword-cane, which he was carrying when way-laid by the brothers, the younger armed with a heavy bludgeon.

An intimate friend of Dr. Dabney's happened to be approaching at the moment of the encounter. The younger brother stepped up in front of Professor Sylvester and demanded an instant and humble apology.

Almost immediately he struck at Sylvester, knocking off his hat, and then delivered with his heavy bludgeon a crushing blow upon Sylvester's bare head.

Sylvester drew his sword-cane and lunged straight at him, striking him just over the heart. With a despairing howl, the student fell back into his brother's arms screaming out, "I am killed!!" "He has killed me!" Sylvester was urged away from the spot by Dr. Dabney's friend, and without even waiting to collect his books, he left for New York, and took ship back to England.

Meanwhile, a surgeon was summoned to the student, who was lividly pale, bathed in cold sweat, in complete collapse, seemingly dying, whispering his last prayers. The surgeon tore open his vest, cut open his shirt, and at once declared him not in the least injured. The fine point of the sword-cane had struck a rib fair, and caught against it, not penetrating.

When assured that the wound was not much more than a mosquito-bite, the dying man arose, adjusted his shirt, buttoned his vest, and walked off, though still trembling from the nervous shock.

3.8 La condensation de Dodgson

Soit à calculer un déterminant $A = |a_{i,j}|_{i,j=1,\dots,n}$. Il convient d'abord de le réarranger par combinaison de lignes et de colonnes, de manière à ce que ses coefficients d'indices compris entre 2 et $n-1$ soient non nuls. La « condensation de Dodgson » se déroule en 3 étapes :

1. former tous les déterminants 2×2 possibles avec des termes contigus, que l'on place dans un déterminant de taille $(n-1) \times (n-1)$,
2. répéter l'opération de manière à obtenir un déterminant de taille $(n-2) \times (n-2)$, disons $C = |c_{i,j}|_{i,j=1,\dots,n-2}$,
3. diviser chaque terme $c_{i,j}$ par le terme $a_{i+1,j+1}$ du déterminant initial.

On itère ensuite jusqu'à atteindre la taille 1×1 , et diviser par le terme central du déterminant 3×3 obtenu antérieurement : le résultat est le déterminant cherché. Vous n'êtes pas convaincu que l'algorithme fait bien ce qui est annoncé ? Il n'est peut-être pas utile de s'acharner à en savoir plus : il faut bien avouer qu'il n'a aucun intérêt ni pour le calcul à la main, ni pour l'implémentation sur machine. Le nombre d'opérations, certes plus réduit que pour le développement par lignes, reste très supérieur à celui de la méthode du pivot de Gauss.

Charles Dodgson (1832–1898) a publié cette méthode en 1866 sous le titre « *Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values* ». Pas plus que sa méthode, il n'a laissé de souvenir impérissable, ni comme enseignant (il était professeur au Christ Church College d'Oxford mais avait des problèmes d'élocution), ni comme mathématicien.

An inveterate publisher of trifles [who] was forever putting up pamphlets, papers, broadsheets, and books on mathematical topics [that] earned him no reputation beyond that of a crochety, if sometimes amusing controversialist, a compiler of puzzles and curiosities, and a busy yet ineffective reformer on elementary points of computation and instructional methods. In the higher reaches of the subject he made no mark at all, and has left none since.

Voilà ce qui s'appelle habiller quelqu'un pour l'hiver. N'y a-t-il vraiment rien d'autre pour le sauver ? La religion ? Il n'alla pas jusqu'à être ordonné prêtre, mais il fut tout de même diacre et il prononçait régulièrement des sermons et servait des offices religieux. Ou bien la photographie ? Il laissa une collection de 3000 clichés. Rien de tout cela ne suffit à expliquer pourquoi Charles L. Dodgson est plus célèbre que n'importe quel autre mathématicien.

Vous le connaissez sous le pseudonyme de Lewis Carroll : « *Alice in Wonderland* » est paru en 1865, un an avant la méthode de condensation. Profitons en pour tordre le cou une fois de plus à une rumeur tenace, qui a commencé à circuler peu après. La voici reprise dans une biographie datant de 1910.

A funny tale is told about Queen Victoria. It seems that Lewis Carroll sent the second presentation copy of "Alice in Wonderland" to Princess Beatrice, the Queen's youngest daughter. Her mother was so pleased with the book that she asked to have the author's other works sent to her, and we can imagine her surprise when she received a large package of learned treatises by the mathematical lecturer of Christ Church College.

L'anecdote est piquante, mais complètement imaginaire et d'ailleurs incompatible avec le caractère de Dodgson et le soin qu'il prit à se démarquer de Lewis Carroll. Il se crut tout de même obligé de publier un démenti trente ans plus tard.

I take this opportunity of giving what publicity I can to my contradiction of a silly story, which has been going the round of the papers, about my having presented certain books to Her Majesty the Queen. It is so constantly repeated, and is such absolute fiction, that I think it worthwhile to state, once for all, that it is utterly false in every particular : nothing even resembling it has occurred.