Équations différentielles

Bernard Ycart

Ce chapitre ne contient pratiquement rien de théorique ; seulement des méthodes de calcul classiques, pour les équations différentielles les plus simples. Quelle que soit votre orientation scientifique, vous rencontrerez un jour des équations différentielles ; voilà donc une raison d'assimiler la culture de base que vous donne ce chapitre. Auparavant, il serait bon de réviser les techniques de calcul des primitives.

Table des matières

22 janvier 2011

1 Cours

1.1 Problèmes différentiels

La plupart des modèles différentiels se présentent sous la forme suivante :

$$y^{(d)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(d-1)}(t)) \ . \tag{1}$$

L'entier d est l'*ordre* de l'équation. La fonction inconnue y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^k$, de même que ses dérivées successives $y', \ldots, y^{(d)}$. La fonction g est une fonction de $d+1$ variables. La variable t est réelle, et représente le *temps*. Les variables suivantes peuvent être vectorielles. Le problème consiste à trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$, dérivable jusqu'à l'ordre d et vérifiant (1) pour tout $t \in I$. Trois types de questions se posent.

1. *Questions théoriques :* à quelle(s) condition(s) portant sur la fonction f l'équation (1) admet-elle des solutions ? Sur quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ ces solutions sont-elles définies ? Existe-t-il une solution unique vérifiant des conditions données ?

   Nous n'aborderons pas ces questions théoriques, qui dépassent le niveau de ce cours. Toutes les équations différentielles qui seront traitées ont des solutions, et nous le vérifierons au cas par cas.

2. *Résolution formelle :* est-il possible d'exprimer les solutions de (1) comme combinaisons de fonctions classiques ?

   Il existe de très nombreuses méthodes de résolution formelle des équations différentielles, adaptées chacune à un type particulier d'équation. Elles sont implémentées dans les logiciels de calcul formel comme `Xcas`. Le but de ce chapitre est de présenter certaines des plus simples de ces méthodes.

3. *Résolution numérique :* est-il possible de calculer par ordinateur des approximations numériques des solutions de (1) ? Quelle précision par rapport aux solutions théoriques une méthode donnée permet-elle d'atteindre ?

   Les problèmes différentiels rencontrés dans les applications n'ont que rarement une solution formelle explicite. De plus la résolution explicite, qu'elle produise une solution comme combinaison de fonctions classiques, sous forme de série entière ou de transformée de Laplace inverse, ne fait que déplacer le problème de l'évaluation numérique. Considérons par exemple $y'(t) = y(t)$. La solution est immédiate, c'est $y(t) = \mathrm{e}^t y(0)$. Mais s'il doit calculer e^t pour $t = 2.53$, l'ordinateur utilisera un algorithme d'approximation polynomiale. Les fonctions classiques peuvent être définies comme des sommes de séries (exponentielle), des intégrales (fonction Gamma), ou même des solutions de certaines équations différentielles (fonctions de Bessel). Dans ce dernier cas c'est précisément parce que des équations couramment rencontrées n'avaient pas de solution explicite que l'on a été amené à baptiser leurs solutions. Pour un ordinateur, toute fonction, qu'elle soit « explicite » ou non, correspond in fine à un algorithme de calcul approché : approximation polynomiale, intégration numérique, ou même résolution numérique d'équation différentielle. Les méthodes d'approximation numérique ont donc une portée beaucoup plus générale que les méthodes formelles, mais nous ne les aborderons pas.

Une équation sous la forme (1) est dite *homogène en temps* si son expression ne dépend pas de la première variable t :

$$y^{(d)}(t) = g(y(t), y'(t), \ldots, y^{(d-1)}(t)) .$$

Pour rendre une équation homogène en temps, il suffit de considérer le temps t comme une inconnue fictive, en posant $z(t) = (t, y(t))$. On a alors :

$$z'(t) = (1, y'(t)) \,,\; z''(t) = (0, y''(t)) \,, \ldots ,\; z^{(d)}(t) = (0, y^{(d)}(t)) .$$

Typiquement un modèle est homogène en temps quand le choix de l'origine n'intervient pas dans les hypothèses de modélisation. Si $y(t)$ est solution d'une équation homogène en temps, avec $y(t_0) = x$, alors l'application z qui à t associe $y(t_0 + t)$ est solution de la même équation différentielle, avec $z(0) = x$. Dans un modèle homogène en temps, on peut toujours choisir 0 comme instant initial, et considérer sans perte de généralité que la condition initiale est donnée en $t = 0$.

Toujours au prix d'une augmentation de la dimension, on peut ramener une équation d'ordre d à une équation d'ordre 1. Il suffit pour cela de poser :

$$y_0(t) = y(t) \,,\; y_1(t) = y'(t) \,, \ldots ,\; y_{d-1}(t) = y^{(d-1)}(t) .$$

Avec ces notations, y est solution de (1) si et seulement si les fonctions y_i pour $0 \leq i \leq d-1$ sont une solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_0'(t) & = & y_1(t) \\ y_1'(t) & = & y_2(t) \\ & \vdots & \\ y_{(d-2)}'(t) & = & y_{(d-1)}(t) \\ y_{(d-1)}'(t) & = & g(t, y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{(d-1)}(t)) . \end{array} \right.$$

En d'autres termes, le vecteur $Y(t)$, de coordonnées $y_i(t)$ pour $0 \leq i \leq d-1$ est solution de $Y'(t) = G(t, Y(t))$, avec :

$$G(t, y_0, \ldots, y_{d-2}, y_{d-1}) = \Big(y_1, \ldots, y_{d-1}, g(t, y_0(t), \ldots, y_{(d-1)}(t)) \Big) .$$

Considérons par exemple l'équation d'ordre 2 suivante :

$$y''(t) = y'(t) + y(t) + t .$$

La fonction vectorielle Y définie par $Y(t) = (t, y(t), y'(t))$ est solution de l'équation d'ordre 1 homogène en temps $Y'(t) = G(Y(t))$, avec :

$$G(s, y_1, y_2) = (1, y_2, y_2 + y_1 + s) .$$

On peut ainsi transformer toute équation explicite en une équation d'ordre 1 homogène en temps. Ceci présente de nombreux avantages, théoriques et pratiques.

Considérons une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^d$, homogène en temps :

$$Y'(t) = G(Y(t)) \; .$$

Toute solution $Y(t)$ définit une courbe dans $\mathbb{R}^d$, paramétrée par t. On peut voir cette courbe comme la trajectoire d'un mobile. Le vecteur $Y'(t)$ est le vecteur vitesse de ce mouvement et il est tangent à la courbe. L'application G, de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, peut être vue comme un *champ de vecteurs* dans l'espace. C'est le champ de tous les vecteurs vitesse possibles pour les trajectoires solution de $Y' = G(Y)$. Nous donnons ci-dessous deux exemples d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^2$, avec une représentation discrétisée du champ des vecteurs tangents, et quelques trajectoires de solutions de l'équation différentielle.

Exemple 1 (figure 1) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t) - 2y(t)/\log(x(t)^2 + y(t)^2) \\ y'(t) & = & -y(t) + 2x(t)/\log(x(t)^2 + y(t)^2) \; . \end{array} \right.$$

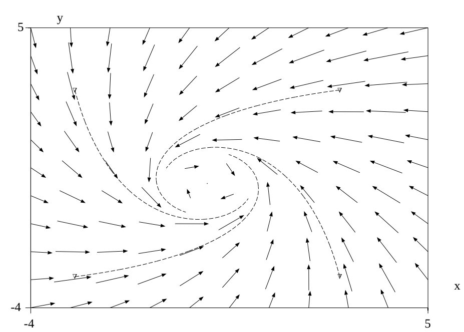

FIG. 1 – Représentation graphique d'un système d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^2$ (exemple 1).

Exemple 2 (figure 2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t)^2 - y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t)^2 \; . \end{array} \right.$$

Nous allons chercher à résoudre certaines équations d'ordre 1, dont les fonctions inconnues seront des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$y'(t) = g(t, y(t)) \; ,$$

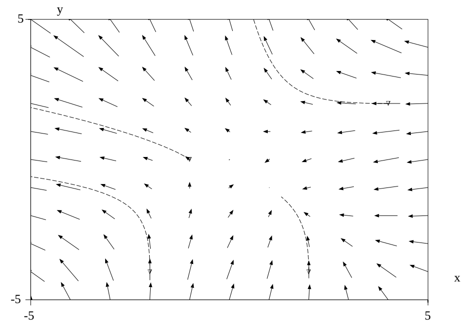

FIG. 2 – Représentation graphique d'un système d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^2$ (exemple 2).

où g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour une telle équation, on visualise par leurs graphes dans $\mathbb{R}^2$ les fonctions solutions (t en abscisse, $y(t)$ en ordonnée). Supposons qu'au point (t, y) passe une solution. La dérivée de cette solution est $y'(t) = g(t, y(t))$: le vecteur $Y'(t) = (1, g(t, y(t)))$ est tangent à la courbe représentant la solution, au point $(t, y(t))$. Voici deux exemples.

Exemple 3 (figure 3) :

$$y'(t) = 2y(t) - (y(t))^2 \ .$$

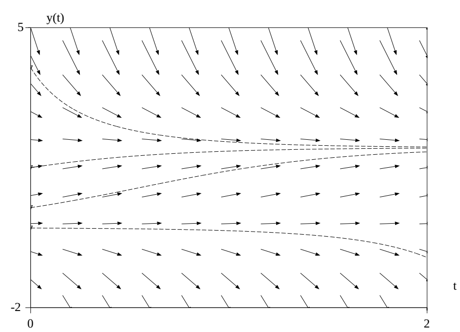

FIG. 3 – Représentation graphique d'une équation différentielle dans $\mathbb{R}$ (exemple 3).

Exemple 4 (figure 4) :

$$y'(t) = (2 + \cos(t))y(t) - \frac{1}{2}y(t)^2 - 1 \ .$$

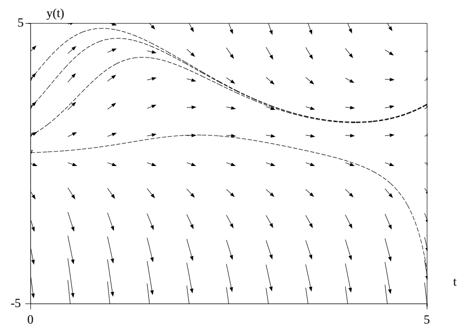

FIG. 4 – Représentation graphique d'une équation différentielle dans $\mathbb{R}$ (exemple 4).

1.2 Solution générale et problème de Cauchy

Avant d'aller plus loin, il convient de préciser ce que nous entendons par *résolution* d'une équation différentielle. Cela recouvre en fait deux types de problèmes. Le premier est la détermination de *l'ensemble des solutions*. La définition suivante précise la notion de solution pour les équations différentielles d'ordre 1. Elle s'étend de façon évidente à des équations différentielles plus générales.

Définition 1. *Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle* solution sur I *de l'équation différentielle $y' = g(t, y)$, toute application $y \; : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I, telle que :*

$$\forall t \in I \ , \quad y'(t) = g(t, y(t)).$$

Résoudre *une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des solutions de cette équation sur I, pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$.*

Vous connaissez probablement déjà l'équation $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels fixés. Vous savez donc que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, l'application suivante est solution de cette équation sur I (si vous ne le savez pas, vérifiez-le en calculant y').

$$\begin{array}{ccl} I & \stackrel{y}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = -\dfrac{b}{a} + C\mathrm{e}^{at} \; . \end{array}$$

Dans cet exemple, il n'y a aucune différence d'expression entre les solutions définies sur un intervalle I et l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$. De façon abrégée, on dira que $y(t) = -b/a + C\mathrm{e}^{at}$ est la *solution générale* de l'équation $y' = ay + b$, manière de dire que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ t \mapsto -\frac{b}{a} + C\mathrm{e}^{at} \, , \; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mais il peut très bien se faire que les solutions ne soient pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est le cas bien sûr si $g(t, y)$ n'est pas défini pour certaines valeurs de t. La définition 1 impose que $g(t, y(t))$ existe pour tout t dans l'intervalle I sur lequel $y(t)$ est solution. Pour en donner des exemples, il suffit de faire appel aux calculs de primitives, qui sont des équations différentielles particulières. Considérons par exemple $y' = 1/t$. Il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'autres sur $\mathbb{R}^{-*}$:

$$\begin{array}{ccl} & y & \\ ]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = \ln(-t) + C_1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccl} & y & \\ ]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = \ln(t) + C_2\ . \end{array}$$

Il se peut aussi que chaque solution soit définie sur un intervalle qui lui est propre. Considérons par exemple $y' = -y^2$. La seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle. Les autres sont toutes de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccl} & y & \\ ]-\infty, C_1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = \dfrac{1}{t - C_1} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccl} & y & \\ ]C_2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = \dfrac{1}{t - C_2}\ . \end{array}$$

Malgré les problèmes de définition, il est raisonnable de garder en tête l'idée intuitive que la solution générale d'une équation du premier ordre dépend d'une constante arbitraire (le réel noté C, C_1 ou C_2 dans les exemples précédents). On peut donc s'attendre à ce qu'en imposant une condition supplémentaire, on arrive à déterminer une solution unique. En général, cette condition est une valeur fixée de la fonction : on impose à la solution de passer par un point donné. Par exemple, vous pouvez vérifier que pour tout couple $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique de l'équation $y' = ay + b$ telle que $y(t_0) = y_0$. Ce n'est pas toujours le cas.

Dans les applications, la variable t correspond souvent au temps. Un type de problème fréquent est le calcul d'une solution partant d'une valeur donnée en $t = 0$: cela s'appelle *résoudre un problème de Cauchy.*

Définition 2. *Soit g une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y_0 un réel. Résoudre le problème de Cauchy :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & g(t, y) \\ y(0) & = & y_0\ , \end{array} \right. \tag{2}$$

c'est déterminer l'ensemble des réels strictement positifs T, et l'ensemble des fonctions $y\ : [0, T] \to \mathbb{R}$, telles que $y(0) = y_0$ et :

$$\forall t \in [0, T[\ , \quad y'(t) = g(t, y(t))\ .$$

Il existe des théorèmes qui, sous des conditions assez générales portant sur g, assurent l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Il peut aussi se faire qu'il n'y ait aucune solution, ou bien qu'il y en ait une infinité. Considérons par exemple l'équation $y' = 2\sqrt{y}$. La fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$, et d'autres solutions sont données par :

$$\begin{array}{rcl} & y & \\ ]C, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) = (t-C)^2\ . \end{array}$$

Il se trouve que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant C \\ (t-C)^2 & \text{si} \quad t \geqslant C\ , \end{cases}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & 2\sqrt{y} \\ y(0) & = & 0\ , \end{cases}$$

a une infinité de solutions.

1.3 Equations linéaires sans second membre

Cette section est consacrée à la résolution d'équations du type suivant :

$$y'(t) = a(t)\, y(t)\ . \tag{3}$$

Théorème 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction définie et continue sur I. Soit $A\ : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions sur I de* (3) *est l'ensemble des fonctions y de I dans $\mathbb{R}$, telles que*

$$\forall t \in I\ , \quad y(t) = C\, \mathrm{e}^{A(t)}\ , \tag{4}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Dans cet énoncé A est *une* primitive *quelconque* de a. Deux primitives diffèrent par une constante additive. Remplacer une primitive par une autre dans (4) ajoute une constante dans l'exponentielle, donc multiplie l'exponentielle par une constante. L'ensemble des solutions de (3) est une droite vectorielle : toutes les solutions sont proportionnelles entre elles.

Dans le cas particulier où a est constante, la solution générale de l'équation $y'(t) = a\, y(t)$ est $y(t) = C\, \mathrm{e}^{at}$, ce que vous saviez déjà.

Démonstration : Multiplions les deux membres de (3) par $\mathrm{e}^{-A(t)}$, qui est toujours non nul. Toute solution de (3) vérifie aussi :

$$y'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = a(t)y(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \iff y'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - a(t)y(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = 0\ .$$

Or le premier membre est la dérivée de $y(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. Donc y est solution si et seulement si la fonction $t \mapsto y(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ a une dérivée nulle sur I, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que pour tout $t \in I$,

$$y(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = C.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, $y(t) = C\mathrm{e}^{A(t)}$. □

Il n'est pas conseillé de retenir (4) par cœur, mais plutôt de refaire le calcul pour chaque équation par le moyen mnémotechnique suivant (non rigoureux mais efficace). Commençons par mettre (3) sous la forme

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t) ,$$

sans nous préoccuper de la nullité éventuelle de $y(t)$. Si on prend une primitive de chaque membre, les deux primitives doivent être égales à une constante près, que l'on note $\ln(C)$.

$$\ln|y(t)| = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s + \ln(C) .$$

L'exponentielle des deux membres donne :

$$|y(t)| = C\,\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) .$$

Si la valeur absolue de y est proportionnelle à $\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$, soit y est nulle partout, soit y ne s'annule nulle part. Dans ce dernier cas, comme les fonctions y et $|y|$ sont continues, $y(t) = |y(t)|$ partout ou bien $y(t) = -|y(t)|$ partout. On retrouve donc (4).

Voici un exemple.

$$y'(t) = \frac{1}{t}\,y(t) .$$

Observons que dans ce cas la fonction $a(t)$ n'est pas définie en 0. On ne pourra donc résoudre l'équation que sur l'un des deux intervalles $]-\infty, 0\,[$ ou $]\,0, +\infty[$. La méthode ci-dessus se détaille comme suit.

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{y(t)} &= \frac{1}{t} \\ \ln|y(t)| &= \ln|t| + \ln(C) \\ y(t) &= Ct . \end{aligned}$$

Malgré l'expression obtenue, les solutions ne peuvent pas être définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, puisque l'équation n'a pas de sens en $t = 0$. La fonction définie par

$$y(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t > 0 \\ -3t & \text{si } t < 0 , \end{cases}$$

est solution de l'équation, sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Outre déterminer la solution générale, on peut aussi chercher une solution vérifiant une condition donnée ; c'est le problème de Cauchy.

Proposition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue sur I. Soit t_0 un point de I et y_0 un réel quelconque. Il existe une unique fonction vérifiant* (3) *et telle que $y(t_0) = y_0$. Cette solution est définie par :*

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) .$$

Démonstration : La vérification, en utilisant le théorème 1, est immédiate. □

La technique de résolution des équations linéaires homogènes reste valable pour des équations différentielles du type $y'(t) = a(t)\psi(y(t))$, pourvu que l'on sache calculer une primitive de $\frac{1}{\psi}$. Voici un exemple.

$$y'(t) = (y(t))^{\alpha} ,$$

avec $\alpha \neq 1$. En divisant par y^{α} puis en prenant la primitive des deux membres, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{y'(t)}{(y(t))^{\alpha}} & = & 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(y(t))^{1-\alpha} & = & t + C \\ y(t) & = & \Big((1-\alpha)(t+C)\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} . \end{array}$$

Si $1-\alpha < 0$, $y(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $-C$ par valeurs inférieures, et $y(t)$ n'est pas défini pour $t \geq -C$. On dit que la solution « *explose en temps fini* », dans le cas présent, au temps $t_e = -C$. Remarquons que pour une solution initiale $y(0)$ strictement positive donnée, le temps d'explosion vaut

$$t_e = (y(0))^{1-\alpha}/(\alpha-1).$$

Donc t_e est une fonction décroissante de α. Intuitivement, cela traduit le fait que plus le taux d'accroissement est fort, plus l'explosion a lieu rapidement. À titre d'exemple, la figure 5 représente quelques solutions de l'équation $y' = y^2$.

1.4 Équations linéaires avec second membre

Cette section est consacrée à la résolution d'équations du type suivant :

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) , \tag{5}$$

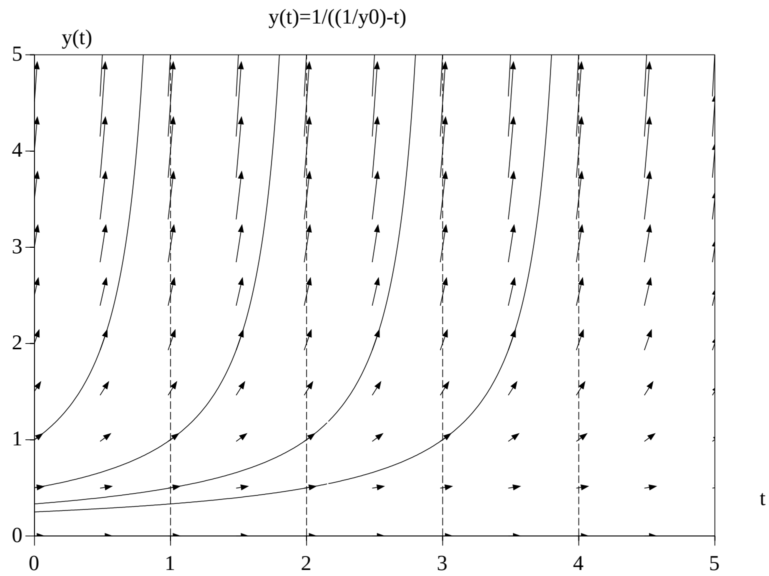

FIG. 5 – Explosion en temps fini : solutions de $y' = y^2$, partant de $y(0) = 1/4, 1/3, 1/2, 1$.

où $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions données, définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et la fonction inconnue y doit être définie et dérivable sur un intervalle ouvert J, inclus dans I. La fonction b est le *second membre*.

Théorème 2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions définies et continues sur I. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a sur I. Soit $y_p(t)$ une solution particulière de* (5)*, définie sur I.*

L'ensemble des solutions sur I de (5) *est l'ensemble des fonctions y de I dans $\mathbb{R}$, telles que :*

$$y(t) = y_p(t) + C\,\mathrm{e}^{A(t)}\ ,$$

où C est une constante réelle.

On retiendra que la solution générale de l'équation $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre $y'(t) = a(t)\,y(t)$. L'ensemble des solutions de (5) est une droite affine, passant par y_p, dont la droite vectorielle associée est l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre.

Démonstration : Une fonction y est solution de (5), si et seulement si la différence $y(t) - y_p(t)$ est solution de l'équation sans second membre (3). Il suffit alors d'appliquer le théorème 1. $\square$

Le théorème 2 suppose la connaissance d'une solution particulière y_p. Ne rêvons pas : les solutions « évidentes » ne le sont jamais. Vous pouvez toujours essayer de trouver une solution constante : $y_p(t) \equiv y_0$. Il y en a parfois ; mais s'il n'y en pas, vous perdriez votre temps à essayer de deviner une solution particulière en cherchant au hasard. Mieux vaut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*. Elle consiste à rechercher les solutions de (5) sous la forme suivante.

$$y(t) = C(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \; .$$

On remplace donc la constante C dans la solution générale de l'équation sans second membre (3), par une fonction de t. C'est pour cela que l'on parle de variation de la constante. À partir de cette expression de $y(t)$, on calcule $y'(t)$, puis $y'(t) - a(t)\, y(t)$, qui doit être égal à $b(t)$.

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & C(t)\, \exp\left(A(t)\right) \\ y'(t) & = & a(t)\, C(t)\, \exp\left(A(t)\right) + C'(t) \exp\left(A(t)\right) \\ y'(t) - a(t)\, y(t) & = & C'(t) \exp\left(A(t)\right) \;=\; b(t) \; . \end{array}$$

On en déduit alors $C'(t)$, puis une primitive $C(t)$, que l'on reporte dans l'expression de $y(t)$. On obtient l'expression suivante, qu'il est conseillé de *ne pas* retenir.

$$y(t) = \left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, \mathrm{d}s\right)\right) \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, \exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(u)\, \mathrm{d}u\right)\, \mathrm{d}s\right) \; .$$

Voici un exemple.

$$y'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}\, y(t) + t \; .$$

Commençons par résoudre l'équation sans second membre.

$$\begin{array}{lcl} y'(t) & = & -\dfrac{2t}{1+t^2}\, y(t) \\ \dfrac{y'(t)}{y(t)} & = & -\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \ln|y(t)| & = & -\ln|1+t^2| + \ln(C) \\ y(t) & = & \dfrac{C}{1+t^2} \; . \end{array}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y(t) = \frac{C}{1+t^2} \; ,$$

où C est une constante réelle quelconque. Cherchons maintenant une solution de l'équation de départ, en remplaçant C par une fonction $C(t)$ dans la solution générale de l'équation sans second membre.

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \dfrac{C(t)}{1+t^2} \;. \\ y'(t) & = & \dfrac{-2t\,C(t)}{(1+t^2)^2} + \dfrac{C'(t)}{1+t^2} \\ y'(t) + \dfrac{2t}{1+t^2}\, y(t) & = & \dfrac{C'(t)}{1+t^2} \;=\; t \\ C'(t) & = & t(1+t^2) \\ C(t) & = & \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4} + C(0) \\ y(t) & = & \dfrac{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}}{1+t^2} + \dfrac{C(0)}{1+t^2} \;. \end{array}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}}{1+t^2} + \frac{C}{1+t^2} \;.$$

Comme dans le cas sans second membre, la donnée d'une condition initiale détermine une solution unique. Il est inutile d'écrire l'expression générale de cette solution. On l'obtient en calculant la constante C à partir de la solution générale. Voici par exemple le calcul pour la solution de l'équation précédente vérifiant $y(1) = 3$.

$$y(1) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} + \frac{C}{2} \;,$$

d'où on tire $C = \frac{21}{4}$.

1.5 Équations à coefficients constants

Cette section est consacrée aux équations du type suivant.

$$y'' = ay' + by \;, \tag{6}$$

où a et b sont deux réels donnés. Avant d'énoncer le résultat qui donne la solution générale de (6), commençons par chercher une solution sous la forme $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$.

$$y(t) = \mathrm{e}^{rt} \;; \quad y'(t) = r\,\mathrm{e}^{rt} \;; \quad y''(t) = r^2\,\mathrm{e}^{rt} \;.$$

Si on reporte ces expressions dans (6), on peut simplifier par e^{rt} qui est toujours non nul. On obtient l'équation suivante en r.

$$r^2 = ar + b \;. \tag{7}$$

Cette équation porte le nom d'*équation caractéristique associée* (ECA). C'est la condition nécessaire et suffisante pour que $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ soit solution de (6). La solution générale de (6) s'exprime à l'aide des racines de l'ECA.

Théorème 3. *Soit E l'ensemble des solutions de* (6)*, définies sur $\mathbb{R}$. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Si l'équation caractéristique associée possède*

1. *deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :*

$$E = \left\{ t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 t}\,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. *une racine double r, alors :*

$$E = \left\{ t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{rt} + C_2 t\mathrm{e}^{rt}\,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. *deux racines complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$, alors :*

$$E = \left\{ t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Voici des exemples illustrant les trois cas (vérifiez les calculs).

Équation	ECA	Racines	Solution générale
$y'' = y' + 6y$	$r^2 = r + 6$	$-2\,,\ 3$	$C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{3t}$
$y'' = -4y' - 4y$	$r^2 = -4r - 4$	$-2\,,\ -2$	$C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2t\mathrm{e}^{-2t}$
$y'' = -4y' - 13y$	$r^2 = -4r - 13$	$-2 \pm 3\mathrm{i}$	$C_1\mathrm{e}^{-2t}\cos(3t) + C_2\mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)$

Démonstration : Nous donnons ici une démonstration élémentaire, sans aucun outil d'algèbre linéaire. Nous commençons par le cas où l'équation caractéristique associée a son discriminant positif ou nul, c'est-à-dire soit deux solutions réelles distinctes, soit une solution double. Nous avons déjà vérifié que $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de (6) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée. Dans le cas où r est racine double, vous vérifierez que $t \mapsto t\mathrm{e}^{rt}$ est aussi solution de (6). Or si y_1 et y_2 sont deux solutions de (6), alors pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $C_1y_1 + C_2y_2$ est encore solution (donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$). Ceci montre que dans les 2 premiers cas, toutes les fonctions proposées sont bien des solutions de l'équation différentielle. Nous devons prouver que ce sont les seules.

Soit r une racine de l'équation caractéristique associée. Soit y une fonction telle que $y'' = ay' + by$. Considérons la fonction z définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$z(t) = y(t)\mathrm{e}^{-rt} \iff y(t) = z(t)\mathrm{e}^{rt} \; .$$

Écrivons en fonction de z les dérivées successives de y.

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \mathrm{e}^{rt}z(t) \\ y'(t) & = & r\mathrm{e}^{rt}z(t) + \mathrm{e}^{rt}z'(t) \\ y''(t) & = & r^2\mathrm{e}^{rt}z(t) + 2r\mathrm{e}^{rt}z'(t) + \mathrm{e}^{rt}z''(t) \end{array}$$

Multiplions y par b, y' par a, y'' par -1 et ajoutons. Comme r vérifie $r^2 = ar + b$, les termes en $z(t)$ disparaissent, et après simplification par e^{rt} il reste :

$$(a - 2r)z'(t) - z''(t) = 0 \; .$$

Donc z' vérifie une équation linéaire du premier ordre. Le théorème 1 donne la solution générale :

$$z'(t) = C\mathrm{e}^{(a-2r)t} \; , \; C \in \mathbb{R} \; .$$

Observons que dans l'équation caractéristique associée, la somme des deux racines est égale à a. Il peut se faire que $a - 2r$ soit nul : c'est le cas si r est racine double. Dans ce cas :

$$z(t) = Ct + C_2 \iff y(t) = \mathrm{e}^{rt}(Ct + C_2) \; .$$

C'est le point *2* du théorème.

Supposons maintenant $(a - 2r) \neq 0$: l'équation caractéristique associée a deux racines réelles distinctes, qui sont r et $a - r$.

$$z(t) = \frac{C}{a-2r}\mathrm{e}^{(a-2r)t} + C_2 \implies y(t) = \frac{C}{a-2r}\mathrm{e}^{(a-r)t} + C_2\mathrm{e}^{rt} \; .$$

En posant $C_1 = C/(a - 2r)$, ceci démontre le point *1* du théorème.

Le cas où l'équation caractéristique associée a deux racines complexes est un peu plus délicat si vous n'avez pas l'habitude de dériver des fonctions à valeurs complexes. Nous nous contenterons d'esquisser l'argument. Il se trouve que tout ce que nous venons de dire pour des racines réelles, reste vrai pour des racines complexes. La *même* démonstration prouve que l'ensemble des fonctions *à valeurs complexes* vérifiant $y'' = ay + b$ est :

$$E = \left\{ t \mapsto \mathcal{C}_1 \, \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + \mathcal{C}_2 \, \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} \; , \; (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in \mathbb{C}^2 \right\} \; .$$

Reste à extraire de cet ensemble les fonctions à valeurs réelles. Pour qu'une des fonctions écrites ci-dessus ne prenne que des valeurs réelles pour $t \in \mathbb{R}$, il est nécessaire et suffisant que les deux constantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient deux complexes conjugués. L'ensemble des fonctions à valeurs réelles solution de l'équation (6) peut donc s'écrire :

$$E = \left\{ t \mapsto (c_1 + \mathrm{i}c_2) \, \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + (c_1 - \mathrm{i}c_2) \, \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} \; , \; (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \; .$$

Or :

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\Big) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t) - \mathrm{i}\sin(\beta t)\Big) .$$

On en déduit :

$$(c_1 + \mathrm{i}c_2)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + (c_1 - \mathrm{i}c_2)\,\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\beta t} = 2c_1\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) - 2c_2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) .$$

D'où le résultat, en remplaçant $2c_1$ par C_1 et $-2c_2$ par C_2. □

1.6 Seconds membres en exponentielles et polynômes

Dans cette section, nous ajoutons une fonction de la variable à l'équation du second ordre à coefficients constants de la section précédente.

$$y'' = ay' + by + h , \tag{8}$$

où a et b sont deux réels, et h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: le *second membre*. Comme pour les équations linéaires du premier ordre, la solution générale de (8) s'obtient en ajoutant une solution particulière à l'équation sans second membre (6). Le théorème suivant est l'analogue du théorème 2.

Théorème 4. *Soit y_p une solution particulière de $y'' = ay' + by + h$. Soit (y_1, y_2) une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre $y'' = ay' + by$. L'ensemble des solutions de $y'' = ay' + by + h$ est :*

$$E = \Big\{ C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + y_p \,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

Démonstration : Une fonction y est solution de (8), si et seulement si la différence $y(t) - y_p(t)$ est solution de l'équation homogène (6). Il suffit alors d'appliquer le théorème 3. □

L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension 2 (plan affine). Pour résoudre (8), il suffit de trouver une solution particulière. Il existe une méthode générale du type « variation des constantes », mais elle est assez compliquée à mettre en œuvre et nous ne la développerons pas ici. Nous étudierons seulement certains seconds membres particuliers, du type « exponentielle-polynôme ». La première observation est que les solutions dépendent linéairement du second membre au sens du résultat suivant, que l'on appelle aussi *principe de superposition des solutions.*

Théorème 5. *Soient a et b deux réels, h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux fonctions, solutions respectivement des équations différentielles :*

$$y'' = ay' + by + h_1 \quad \textit{et} \quad y'' = ay' + by + h_2 .$$

Pour tout couple de réels (λ, μ), la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation :

$$y'' = ay' + by + (\lambda h_1 + \mu h_2) .$$

Démonstration : Il suffit d'écrire les deux équations :

$$\begin{aligned} y_1'' &= ay_1' + by_1 + h_1 \\ y_2'' &= ay_2' + by_2 + h_2 \ . \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par λ, la seconde par μ et on ajoute. □

En utilisant ce principe, il est possible de calculer des solutions particulières, quand h est une combinaison d'exponentielles et de polynômes, grâce au résultat suivant.

Théorème 6. *Soient a, b deux réels, et λ un complexe. Soit P une fonction polynôme. Soit (E) l'équation différentielle suivante.*

$$(E) \qquad y''(t) = ay'(t) + by(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} P(t) \ .$$

Soit (ECA) l'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre.

$$(ECA) \qquad r^2 = ar + b \ .$$

L'équation (E) admet une solution particulière de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} Q(t)$, où Q est une fonction polynôme de degré :

$$\begin{array}{rcll} \deg(Q) &=& \deg(P) & \textit{si} \ \ \lambda \textit{ n'est pas solution de } (ECA), \\ \deg(Q) &=& \deg(P)+1 & \textit{si} \ \ \lambda \textit{ est solution simple de } (ECA), \\ \deg(Q) &=& \deg(P)+2 & \textit{si} \ \ \lambda \textit{ est solution double de } (ECA). \end{array}$$

Démonstration : Posons $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} Q(t)$, et calculons :

$$\begin{array}{rcl} -by(t) &=& \mathrm{e}^{\lambda t} \left(-bQ(t)\right) \\ -ay'(t) &=& \mathrm{e}^{\lambda t} \left(-a\lambda Q(t) - aQ'(t)\right) \\ y''(t) &=& \mathrm{e}^{\lambda t} \left(\lambda^2 Q(t) + 2\lambda Q'(t) + Q''(t)\right) \\ \hline y''(t) - ay'(t) - by(t) &=& \mathrm{e}^{\lambda t} \Big((\lambda^2 - a\lambda - b)Q(t) + (2\lambda - a)Q'(t) + Q''(t) \Big) \end{array}$$

En identifiant avec l'équation (E), on voit que y est solution si et seulement si :

$$\Big((\lambda^2 - a\lambda - b)Q(t) + (2\lambda - a)Q'(t) + Q''(t) \Big) = P(t).$$

Au second membre apparaît le polynôme inconnu $Q(t)$ et ses deux dérivées.

1. Si $\lambda^2 - a\lambda - b \neq 0$ (donc λ n'est pas solution de (ECA)) : on peut chercher un polynôme de même degré que P. En identifiant les coefficients, on aura à résoudre un système linéaire dont la matrice est carrée et triangulaire : ce système a une solution unique.
2. Si $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ et $2\lambda - a \neq 0$ (donc λ est racine simple de (ECA)) : pour équilibrer les degrés, il faudra choisir Q' de même degré que P. L'identification des coefficients mène à un système dont l'ensemble des solutions est une droite affine de dimension 1.

3. Si $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ et $2\lambda - a = 0$ (donc λ est racine double de (ECA)) : alors $Q''(t) = P(t)$. Par deux intégrations successives, on trouve l'ensemble de toutes les solutions de l'équation de départ : c'est un plan affine.

□

Quand λ est un réel, l'utilisation de ce théorème ne pose pas de problème particulier. Voici quelques exemples.

Équation	ECA	Racines	Solution particulière
$y'' = y' + 6y + t\mathrm{e}^t$	$r^2 = r + 6$	$-2\,,\ 3$	$\mathrm{e}^t(\alpha t + \beta)$
$y'' = y' + 6y + t\mathrm{e}^{-2t}$	$r^2 = r + 6$	$-2\,,\ 3$	$\mathrm{e}^{-2t}(\alpha t^2 + \beta t)$
$y'' = -4y' - 4y + t\mathrm{e}^t$	$r^2 = -4r - 4$	$-2\,,\ -2$	$\mathrm{e}^t(\alpha t + \beta)$
$y'' = -4y' - 4y + t\mathrm{e}^{-2t}$	$r^2 = -4r - 4$	$-2\,,\ -2$	$\mathrm{e}^{-2t}(\alpha t^3 + \beta t^2)$
$y'' = -4y' - 13y + t\mathrm{e}^t$	$r^2 = -4r - 13$	$-2 \pm 3\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^t(\alpha t + \beta)$

L'utilisation du théorème pour λ *complexe* est un peu plus délicate. Elle permet de traiter le cas où le second membre est une combinaison linéaire de sinus et cosinus. Examinons l'exemple suivant.

$$y''(t) = -y(t) + \cos^3(t)\ .$$

Le second membre ne ressemble pas à ceux que nous avons déjà traités. Mais en linéarisant :

$$\cos^3(t) = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t) = \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}\ .$$

Le principe de superposition des solutions permet de traiter séparément les équations pour chacun des seconds membres.

Considérons d'abord $y'' = -y(t) + \frac{3}{4}\cos(t)$. Comme i et $-$i sont racines de l'équation caractéristique, il faut chercher des solutions sous la forme

$$\alpha t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\ .$$

A priori, α et β sont des complexes, mais comme nous cherchons des solutions réelles, celles-ci seront nécessairement de la forme :

$$\gamma t\cos(t) + \delta t\sin(t)\ .$$

Le calcul direct par indentificaton des coefficients donne $\gamma = 0$ et $\delta = 3/8$.

Traitons mantenant l'équation $y'' = -y(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$. Puisque $-3\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, on doit chercher des solutions sous la forme :

$$\alpha \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \beta \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} .$$

Comme elles doivent être réelles, on cherchera par identification des coefficients deux réels γ et δ tels que :

$$\gamma \cos(3t) + \delta \sin(3t)$$

soit solution. On trouve $\gamma = -1/32$ et $\delta = 0$. Voici la solution générale de l'équation de départ $y''(t) = -y(t) + \cos^2(t)$.

$$y(t) = \frac{3}{8} t \sin(t) - \frac{1}{32}\cos(3t) + C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \ , \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

1.7 Changements de fonctions et de variables

De nombreuses méthodes ont été inventées pour ramener certaines équations aux cas étudiés dans les sections précédentes. L'idée générale consiste à modifier soit la fonction inconnue soit la variable. Nous nous contenterons dans cette section de donner un exemple pour chacun des deux cas.

Le premier exemple est celui des *équations de Bernoulli*, qui se traitent par un changement de fonction.

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^{\alpha}(t) \ ,$$

avec α différent de 0 et 1. Observons tout d'abord que pour $\alpha > 0$, la fonction nulle est solution de cette équation. Pour trouver les autres solutions, on remplace la fonction inconnue y par $z = y^{1-\alpha}$. En dérivant, on obtient :

$$z'(t) = (1-\alpha)y'(t)y^{-\alpha}(t) = (1-\alpha)(a(t)y^{1-\alpha}(t) + b(t)) \ ,$$

soit

$$z'(t) = (1-\alpha)a(t)\, z(t) + (1-\alpha)b(t) \ ,$$

qui est une équation linéaire. Par exemple :

$$y'(t) = \frac{y(t)}{2t} + \frac{1}{2ty(t)} .$$

Le changement de fonction $z(t) = y^2(t)$ conduit à :

$$z'(t) = \frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t} .$$

La solution générale de cette équation linéaire est $z(t) = Ct - 1$, sur $]-\infty, 0[$, ou bien $]0, +\infty[$. On en déduit les solutions de l'équation de Bernoulli initiale, sous la forme $y(t) = \sqrt{Ct-1}$, définie seulement si $Ct - 1 \geqslant 0$.

Nous donnons maintenant un exemple de changement de variable, avec les *équations d'Euler*.

$$t^2y''(t) = aty'(t) + by(t) + h(t) \; ,$$

où a et b sont deux constantes, h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $t = \mathrm{e}^x$, et $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$. On a alors :

$$z'(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) = ty'(t) \; .$$

En dérivant une fois de plus,

$$z''(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{2x} y''(\mathrm{e}^x) = ty'(t) + t^2 y''(t) \; .$$

Pour $t \in \mathbb{R}^{-*}$, le changement de variable $t = -\mathrm{e}^x$ conduit aux mêmes expressions de z' et z'' en fonction de t et y. On se ramène ainsi, pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, à l'équation linéaire du second ordre en z :

$$z''(x) = (a+1)z'(x) + bz(x) + h(\mathrm{e}^x)$$

Par exemple, l'équation $t^2y''(t) = -ty'(t) - y(t)$, se ramène à $z''(x) = -z(x)$, dont la solution générale est $\Big\{ C_1\cos(x) + C_2\sin(x) \; , \; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$. La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ (respectivement : $\mathbb{R}^{-*}$) s'obtient en remplaçant x par $\ln(t)$ (respectivement : $\ln(-t)$).

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\quad y'(t) = y(t)/t^2$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ (E) est une équation linéaire homogène du premier ordre.
2. ☐ (E) a une solution unique.
3. ☐ La fonction nulle ($y(t) = 0\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$) est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. ☒ La fonction nulle est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
5. ☐ Toute solution de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
6. ☐ Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution unique telle que $y(0) = y_0$.
7. ☒ Pour tout $y_1 \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution unique telle que $y(1) = y_1$, définie sur $]0, +\infty[$.
8. ☐ $t \mapsto y(t) = C\mathrm{e}^{1/t}$ est solution de (E), pour tout $C \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
9. ☒ $t \mapsto y(t) = C\mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E), pour tout $C \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
10. ☒ La fonction y définie par $y(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$, $y(t) = 2\mathrm{e}^{-1/t}$ si $t < 0$ et $y(0) = 0$, est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
11. ☐ La fonction y de la question précédente est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
12. ☒ La fonction y définie par $y(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$ et $y(t) = 0$ sinon, est solution de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vrai-Faux 2. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\quad y'(t) = y(t)/t^2 + \mathrm{e}^{-1/t}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ (E) est une équation linéaire du premier ordre sans second membre.
2. ☐ La fonction nulle ($y(t) = 0\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$) est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. ☒ La fonction $t \mapsto y(t) = t\mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
4. ☒ Pour tout $y_1 \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution unique telle que $y(1) = y_1$, définie sur $]0, +\infty[$.
5. ☐ $t \mapsto y(t) = C\mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E), pour tout $C \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
6. ☐ La fonction y définie par $y(t) = t\mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$ et $y(t) = 0$ sinon, est solution de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
7. ☒ La fonction y définie par $y(t) = t\mathrm{e}^{-1/t}$ si $t > 0$, et $y(t) = (1 + t)\mathrm{e}^{-1/t}$ si $t < 0$, est solution de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vrai-Faux 3. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y'(t) = y(t) + \mathrm{e}^t$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ (E) a une solution unique.
2. ☒ Toute solution de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
3. ☒ Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, (E) admet une solution unique telle que $y(0) = y_0$.
4. ☐ $t \mapsto y(t) = C\mathrm{e}^t$ est solution de (E), pour tout C.
5. ☐ $t \mapsto y(t) = 2t\mathrm{e}^t$ est solution de (E).
6. ☒ $t \mapsto y(t) = (1+t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$.
7. ☐ $t \mapsto y(t) = (1-t)\mathrm{e}^t$ est l'unique solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Vrai-Faux 4. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y'(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-y(t)}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ (E) est une équation linéaire du premier ordre.
2. ☒ Toute solution de (E) sur un intervalle de $\mathbb{R}$ s'écrit $y(t) = \ln(\sin(t) + C)$, où C est une constante réelle.
3. ☒ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
4. ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$.
5. ☒ La solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est définie sur $]-\pi/2, 3\pi/2[$.
6. ☐ La solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$ est définie sur $]-\arcsin(1/\mathrm{e}), -\arcsin(1/\mathrm{e}) + 2\pi[$.
7. ☒ La solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$ est définie sur $]-\arcsin(1/\mathrm{e}), \arcsin(1/\mathrm{e}) + \pi[$.

Vrai-Faux 5. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y'' = y'(t) + 2y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. ☐ 1 est racine simple de l'équation caractéristique associée.
3. ☒ -1 et 2 sont racines de l'équation caractéristique associée.
4. ☒ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de e^t et e^{2t}.
5. ☐ $y(t) = (t+1)\mathrm{e}^t$ est solution de (E).
6. ☐ (E) admet une unique solution telle que $y(0) = 0$.
7. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est la fonction nulle.

Vrai-Faux 6. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y''(t) = y'(t) - y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Les racines de l'équation caractéristique associée sont deux complexes conjugués.

2. ☐ $t \mapsto y(t) = \cos(\pi t/3)$ est solution de (E).
3. ☐ $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t/2} + \cos(\sqrt{3}t/2)$ est solution de (E).
4. ☒ $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t/2}(\cos(\sqrt{3}t/2 + \varphi)$ est solution de (E), pour tout réel fixé φ.
5. ☐ La fonction nulle est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$.
6. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est la fonction nulle.
7. ☐ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y(\pi/\sqrt{3}) = 1$ est $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$.
8. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est $t \mapsto y(t) = (2/\sqrt{3})\mathrm{e}^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$.

Vrai-Faux 7. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\quad y''(t) = 2y'(t) - y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ L'équation caractéristique associée a une racine double.
2. ☐ $t \mapsto y(t) = t^2\mathrm{e}^t$ est solution de (E).
3. ☒ $t \mapsto y(t) = (2t+1)\mathrm{e}^t$ est solution de (E).
4. ☐ La fonction nulle est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$.
5. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est la fonction nulle.
6. ☐ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^t$.
7. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ $t \mapsto y(t) = t\mathrm{e}^t$.

Vrai-Faux 8. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\quad y'(t) = ty(t) + t/y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ (E) est une équation de Bernoulli.
2. ☒ Si y est solution de (E), alors $-y$ est aussi solution de (E).
3. ☐ Si $z(t) = y^2(t)$, alors z est solution d'une équation linéaire homogène.
4. ☒ Si $z(t) = y^2(t)$, alors z est solution de l'équation $z'(t) = 2tz(t) + 2t$.
5. ☒ La fonction constante $z(t) = -1$ est solution de l'équation $z'(t) = 2tz(t) + 2t$.
6. ☒ La fonction $z(t) = -\mathrm{e}^{t^2} - 1$ est solution de l'équation $z'(t) = 2tz(t) + 2t$.
7. ☐ La fonction $y(t) = \sqrt{-\mathrm{e}^{t^2} - 1}$ est solution de (E).
8. ☐ Il existe des solutions de (E) qui ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
9. ☒ Si $K > 1$, alors $y(t) = \sqrt{K\mathrm{e}^{t^2} - 1}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
10. ☐ Toute solution de (E) est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
11. ☒ $y(t) = -\sqrt{5\mathrm{e}^{t^2} - 1}$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = -2$.
12. ☐ Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution de (E) telle que $y(0) = y_0$.
13. ☒ Pour tout $y_0 \neq 0$, il existe une solution de (E) unique telle que $y(0) = y_0$.

Vrai-Faux 9. On considère l'équation différentielle $(E)\quad:\quad y'(t) = -ty(t) - t/y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ (E) est une équation de Bernoulli.
2. ☒ Si y est solution de (E), alors $-y$ est aussi solution de (E).
3. ☐ Si $z(t) = y^2(t)$, alors z est solution d'une équation linéaire homogène.
4. ☒ Si $z(t) = y^2(t)$, alors z est solution de l'équation $z'(t) = -2tz(t) - 2t$.
5. ☒ La fonction constante $z(t) = -1$ est solution de l'équation $z'(t) = -2tz(t) - 2t$.
6. ☒ La fonction $z(t) = -\mathrm{e}^{-t^2} - 1$ est solution de l'équation $z'(t) = -2tz(t) - 2t$.
7. ☐ La fonction $y(t) = \sqrt{\mathrm{e}^{-t^2} - 1}$ est solution de (E).
8. ☐ Il existe des solutions de (E) qui sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
9. ☒ Si $K > 1$, alors $y(t) = \sqrt{K\mathrm{e}^{-t^2} - 1}$ est solution de (E) sur un intervalle contenant 0.
10. ☐ Toute solution de (E) est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
11. ☒ $y(t) = -\sqrt{5\mathrm{e}^{-t^2} - 1}$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = -2$.
12. ☒ Pour tout $y_0 \neq 0$, il existe une solution de (E) unique telle que $y(0) = y_0$.
13. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$ est définie sur $]-\sqrt{\ln(2)}, +\sqrt{\ln(2)}[$.

Vrai-Faux 10. On considère l'équation différentielle $(E)\quad:\quad t^2y''(t) = 2y(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ (E) est une équation d'Euler.
2. ☒ $y(t) = t^2$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
3. ☐ $y(t) = \frac{1}{t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. ☒ Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), alors $ay_1 + by_2$ est aussi solution de (E), pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
5. ☒ $y(t) = \frac{3}{t} - 2t^2$ est solution de (E) en tout point t de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. ☐ Si $y(t)$ est solution de (E), alors $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$ est solution de $z''(x) = 2z(x)$.
7. ☒ Si $y(t)$ est solution de (E), alors $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$ est solution de $z''(x) = z'(x) + 2z(x)$.
8. ☒ L'ensemble des solutions de l'équation $z''(x) = z'(x) + 2z(x)$ est $\{z(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{2x}\,,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
9. ☐ L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\{y(t) = a/t + bt^2\,,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
10. ☒ La fonction y définie par $y(t) = t^2$ si $t \geqslant 0$ et $y(t) = 1/t$ si $t < 0$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Vrai-Faux 11. On considère l'équation différentielle $(E)\quad:\quad y''(t) = 2y'(t) - y(t) + \cos(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de e^t et $\cos(t)$.
2. ☒ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de e^t, $t\mathrm{e}^t$, $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
3. ☐ Toute combinaison linéaire de e^t, $t\mathrm{e}^t$, $\cos(t)$ et $\sin(t)$ est solution de (E).
4. ☐ (E) admet une solution particulière de la forme $y(t) = (at + b)\cos(t)$.
5. ☒ (E) admet une solution particulière de la forme $y(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$.
6. ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\sin(t)$ est solution de (E).
7. ☒ $y(t) = t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\sin(t)$ est solution de (E).
8. ☒ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est $y(t) = \frac{1}{2}(3t\mathrm{e}^t - \sin(t))$.
9. ☐ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = \frac{1}{2}(2\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t + \sin(t))$.

Vrai-Faux 12. On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad y''(t) = -y(t) + \cos(t)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.
2. ☒ Toute solution de (E) est combinaison linéaire de $\sin(t)$, $\cos(t)$, $t\sin(t)$ et $t\cos(t)$.
3. ☐ Toute combinaison linéaire de $\sin(t)$, $\cos(t)$, $t\sin(t)$ et $t\cos(t)$ est solution de (E).
4. ☐ (E) admet une solution sous la forme $(at + b)\cos(t)$.
5. ☒ La solution de (E) telle que $y(0) = a$ et $y'(0) = b$ est $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t)$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations homogènes du premier ordre suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

$$y'(t) = 2y(t) \ ; \quad y'(t) = -y(t) \ ; \quad y'(t) = ty(t) \ ;$$

$$t^2y'(t) = -y(t) \ ; \quad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2} \ ; \quad y'(t) = \frac{y(t)}{1-t^2} \ ;$$

$$y'(t) = y(t)\frac{2t+3}{(t-2)(t+5)} \ ; \quad y'(t) = \frac{y(t)}{1+\mathrm{e}^t} \ ; \quad y'(t) = y(t)\sin(t) \ .$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

$$y'(t)y(t) = -t \ ; \quad y'(t) = \mathrm{e}^{t-y(t)} \ ; \quad (1+t^2)y'(t) = 1 + y^2(t) \ ;$$

$$y'(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{-y(t)}\ ; \quad y'(t) = \frac{t}{\cos(y(t))}\ ; \quad y'(t) = \frac{1+y^2(t)}{t^2}\ ;$$
$$y'(t) = \frac{t-1}{1+y(t)}\ ; \quad y'(t) = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-y(t)}\ ; \quad y'(t) = \frac{(t-1)(y^2(t)-1)}{y(t)}\ ;$$
$$y'(t) = \sin(t)(y^2(t)+1)\ ; \quad y'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t)\sqrt{1-y^2(t)}\ .$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes, par la méthode de variation de la constante. Préciser le domaine de validité des solutions.

$$y'(t) = -2ty(t) + t\ ; \quad y'(t) = -y(t)\tan(t) + \sin(t)\cos(t)\ ; \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2-1} + t^2\ ;$$
$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} - 1\ ; \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2} - \frac{1}{t^3}\ ; \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2} + \mathrm{e}^{1/t}\ ;$$
$$y'(t) = 2ty(t) - (2t-1)\mathrm{e}^t\ ; \quad y'(t) = \frac{2t-1}{t^2}\,y(t) + 1\ ; \quad y'(t) = \frac{3t}{1-t^2}\,y(t) - \frac{t^3}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ ;$$
$$y'(t) = 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,y(t) + \frac{1+\cos^2(t)}{\sin(t)}\ ; \quad y'(t) = \cos(t)\,y(t) + 2\cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)\ ;$$
$$y'(t) = \frac{t^2+1}{t(t^2-1)}\,y(t) + 2\ ; \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{\sqrt{1+t^2}} + 1 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ;$$
$$(t^2+1)y'(t) + 4ty(t) = 1\ ; \quad (t^2+1)y'(t) + (t-1)^2y(t) = t^3 - t^2 + t + 1\ ;$$
$$y'(t)\cos(t) + y(t)\sin(t) = \cos(t) + t\sin(t)\ ; \quad (\mathrm{e}^t-1)y'(t) + (\mathrm{e}^t+1)y(t) = 3 + 2\mathrm{e}^t\ ;$$
$$t(t-1))y'(t) - (3t-1)y(t) = -t^2(t+1)\ ; \quad \cos(t)y'(t) + \sin(t)y(t) = \cos(t) + t\sin(t)\ .$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

$$y''(t) = y'(t) + 2y(t)\ ; \quad y''(t) = -y(t)\ ; \quad y''(t) = y(t)\ ;$$
$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0\ ;$$
$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 4y(t) = 0\ ;$$
$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0\ ; \quad y''(t) + y'(t)_6y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0\ ;$$
$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0\ ; \quad 2y''(t) - 3y'(t) + y(t) = 0\ ;$$
$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0\ ; \quad y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0\ ; \quad y''(t) = 5y'(t) + 6y(t)\ .$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

$$y'(t) - y(t) = t\ ; \quad y'(t) - y(t) = \cos(t)\ ; \quad y'(t) + 2y(t) = (t-2)^2\ ;$$
$$y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^t\ ; \quad y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^{2t}\ ; \quad y'(t) - 2y(t) = \cos(t)\ ;$$
$$y'(t) - 2y(t) = t\ ; \quad y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-t}\ ; \quad y'(t) - 2y(t) = t\mathrm{e}^{-2t}\ .$$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations différentielles suivantes.

$$y''(t)-y(t)=t^3+t^2\ ;\quad y''(t)-2y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^t\ ;\quad y''(t)-2y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^t+\cos(t)\ ;$$

$$y''(t)-2y'(t)+2y(t)=t\mathrm{e}^t\cos(t)\ ;\quad y''(t)-2y'(t)+y(t)=t^2\mathrm{e}^{-t}\ ;\quad y''(t)+y(t)=t\ ;$$

$$2y''(t)-3y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^t\ ;\quad y''(t)-4y'(t)+4y(t)=t\ ;\quad y''(t)-4y'(t)+4y(t)=\sin(t)\ ;$$

$$y''(t)-y(t)=\mathrm{e}^{-t}\ ;\quad y''(t)-y(t)=t\mathrm{e}^t\ ;\quad y''(t)+y(t)=\cos(t)\ ;$$

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=\mathrm{e}^t\ ;\quad y''(t)-y(t)=-6\cos(t)+2t\sin(t)\ ;$$

$$y''(t)+2y'(t)+4y(t)=t\mathrm{e}^t\ ;\quad 4y''(t)+4y'(t)+5y(t)=\sin(t)\mathrm{e}^{-t/2}\ ;$$

$$y''(t)-2y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^t\sin(t)\ ;\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=(t^2+1)\mathrm{e}^t\ ;$$

$$y''(t)+y'(t)-6y(t)=\mathrm{e}^{3t}\ ;\quad y''(t)+y'(t)-6y(t)=\mathrm{e}^t(2t+1)\ ;$$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\mathrm{e}^{2t}(t+1)\ ;\quad y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\mathrm{e}^{-2t}(t+1)\ ;$$

$$y''(t)-4y'(t)+4y(t)=\mathrm{e}^t+(3t-1)\mathrm{e}^{2t}+(t-2)\ .$$

Exercice 7. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes. Préciser le domaine de validité des solutions.

$$y'(t)=-\frac{y(t)}{t}-\frac{y^2(t)}{t}\ ;\quad y'(t)=\frac{y(t)\tan(t)}{3}+\frac{1}{3y^2(t)}\ ;$$

$$y'(t)=-\frac{y(t)}{t}-y^2(t)\ln(t)\ ;\quad y'(t)=\frac{y(t)}{t}-2y^2(t)\ ;$$

$$y'(t)=\frac{2y(t)}{t^2+1}-\frac{2\sqrt{y(t)}}{t^2+1}\ ;\quad y'(t)=\frac{3y(t)}{\sin(t)\cos(t)}-3(y(t))^{2/3}\sin^3(t)\ ;$$

$$ty'(t)+3y(t)=t^2y^2(t)\ ;\quad ty'(t)=2y(t)-2\sqrt{y(t)}\ .$$

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations d'Euler suivantes.

$$t^2y''(t)=2ty'(t)-2y(t)\ ;\quad t^2y''(t)=-4ty'(t)-2y(t)\ ;$$

$$t^2y''(t)=-ty'(t)+y(t)\ ;\quad t^2y''(t)=ty'(t)-y(t)\ ;$$

$$t^2y''(t)-ty'(t)+2y(t)=t\ ;\quad t^2y''(t)-2y(t)=t\ ;$$

$$t^2y''(t)+ty'(t)+y(t)=t\ln(t)\ ;\quad t^2y''(t)+3ty'(t)+4y(t)=t\ln(t)\ .$$

Exercice 9. On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad\qquad y'(t)-\frac{1}{t}y(t)-(y(t))^2=-9t^2.$$

1. Déterminer un réel a tel que $y(t) = at$ soit solution de (E). On note y_0 cette solution.
2. Montrer que le changement de fonction inconnue $y(t) = y_0(t) - 1/z(t)$ transforme l'équation (E) en l'équation suivante.

$$(E') \qquad z'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z(t) = 1$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E'), définies sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E), définies sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$ty''(t) - y'(t) - t^3 y(t) = 0 \ ,$$

en posant $t = \sqrt{u}$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + \frac{2t}{1+t^2} y'(t) - \frac{1}{(1+t^2)^2} y(t) = 0 \ ,$$

en posant $t = \tan(u)$.

3. Résoudre l'équation différentielle

$$y(t)y'(t) + y^2(t) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2t} \ ,$$

en posant $z(t) = y^2(t)$.

4. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) + y^2(t) + 2 = 0 \ ,$$

en posant $z(t) = y(t) + 1$.

5. Résoudre l'équation différentielle

$$t^2 y'(t) - y^2(t) + 2t^2 = 0 \ ,$$

en posant $y(t) = tz(t)$.

6. Résoudre l'équation différentielle

$$(3t + y(t))y'(t) = 3y(t) + t \ ,$$

en posant $y(t) = tz(t)$.

7. Résoudre l'équation différentielle

$$t^2 y''(t) - 2ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0 \ ,$$

en posant $y(t) = tz(t)$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ 2y(t)y'(t) = 1$.

A $t \mapsto y(t) = \sqrt{t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

B $t \mapsto y(t) = \sqrt{t-1}$ est la seule solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

C $t \mapsto y(t) = \sqrt{1-t}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

D Pour tout $C \in \mathbb{R}$, (E) possède des solutions définies sur $]C, +\infty[$.

E (E) possède des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Question 2. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(t)(1-t) = y$.

A L'ensemble des solutions de (E) sur $]1, +\infty$ est une droite vectorielle.

B Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.

C L'équation (E) possède une solution définie sur $\mathbb{R}$.

D Les solutions de (E) sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ sont toutes de la forme $C/(1-t)$, où C est une constante réelle.

E L'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Question 3. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y^2(t)y'(t) = t^2(1-y^3)$.

A L'équation (E) et l'équation $y^2(t)y'(t)/(1-y^3) = t^2$ ont les mêmes solutions.

B L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est une droite vectorielle.

C La fonction $t \mapsto y(t) = 1$ est la seule solution constante de E.

D L'équation (E) possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $y(0) = -1$.

E La solution générale de (E) est $1 - C\mathrm{e}^{t^3}$, où C est une constante réelle.

Question 4. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(t) = y(t)/t^2 + 1/t^2$.

A La fonction $t \mapsto y(t) = -1 + \mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

B La fonction $t \mapsto y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

C La fonction $t \mapsto y(t) = 2\mathrm{e}^{1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

D La solution de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = -1$ est constante.

E La fonction $t \mapsto y(t) = 2\mathrm{e}^{-1/t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Question 5. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'(t) = \dfrac{2t-1}{t^2}y(t) + 1$.

A La fonction $t \mapsto y(t) = t^2$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

B La fonction $t \mapsto y(t) = t^2(1 + \mathrm{e}^{-1/t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

C La fonction $t \mapsto y(t) = t^2(1 - \mathrm{e}^{1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{D}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = 2t^2 \mathrm{e}^{1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
$\boxed{\text{E}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = t^2(1 - \mathrm{e}^{1/t})$ est solution de l'équation sans second membre associée à (E).

Question 6. On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; y''(t) = 6y'(t) - 9y(t)$.
$\boxed{\text{A}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{3t} - t\mathrm{e}^{3t}$ est l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.
$\boxed{\text{B}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{3t} - t\mathrm{e}^{3t}$ est une solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.
$\boxed{\text{C}}$ Le réel 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée.
$\boxed{\text{D}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = t(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{3t})$ est solution de (E).
$\boxed{\text{E}}$ Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.

Question 7. On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; y''(t) = 2y'(t) - 5y(t)$.
$\boxed{\text{A}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t}\cos(2t)$ est une solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.
$\boxed{\text{B}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t}$ est l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.
$\boxed{\text{C}}$ Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t}\sin(2t - \varphi)$ est solution de (E).
$\boxed{\text{D}}$ L'équation caractéristique associée a deux racines réelles.
$\boxed{\text{E}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{t}\sin(t)$ est solution de (E).

Question 8. On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; y''(t) = 2y'(t) - y(t) + 2\mathrm{e}^{t}$.
$\boxed{\text{A}}$ Toute fonction de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{t}$, où P est un polynôme de degré 2, est solution de (E).
$\boxed{\text{B}}$ L'équation (E) admet une infinité de solutions de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{t}$, où P est un polynôme de degré 2.
$\boxed{\text{C}}$ L'équation (E) admet une infinité de solutions de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{t}$, où P est un polynôme de degré 1.
$\boxed{\text{D}}$ L'équation (E) admet une solution de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{t}$, où P est un polynôme de degré 3.
$\boxed{\text{E}}$ L'unique solution de (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$ est $t \mapsto y(t) = t^2\mathrm{e}^{t}$.

Question 9. On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; y''(t) = -4y(t) + 4\cos(2t)$.
$\boxed{\text{A}}$ Il existe une constante C telle que la fonction $t \mapsto Ct\cos(2t)$ soit solution de (E).
$\boxed{\text{B}}$ Toute solution de E est de la forme $t \mapsto y(t) = C_1 t\cos(2t) + C_2 t\sin(2t)$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
$\boxed{\text{C}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = t\sin(2t)$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$.
$\boxed{\text{D}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = t\cos(2t)$ est l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
$\boxed{\text{E}}$ L'ensemble des solutions de (E) est un plan affine.

Question 10. On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; t^2y''(t) = ty'(t) - 2y(t) + t$.
$\boxed{\text{A}}$ Si on pose $t = \mathrm{e}^{x}$ et $z(x) = y(t)$, alors z est solution de l'équation $z''(x) = z'(x) - 2z(x) + \mathrm{e}^{x}$.

$\boxed{\text{B}}$ La fonction $t \mapsto y(t) = t$ est l'unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Si y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$, alors $t \mapsto y(-t)$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

$\boxed{\text{D}}$ L'équation (E) admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{E}}$ L'équation (E) est une équation de Bernoulli.

Réponses : 1–AD 2–AC 3–CD 4–AD 5–AC 6–BE 7–AC 8–BE 9–CE 10–BC

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Démontrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(t) + 2ty(t) = 0$ est :
$$\left\{ t \mapsto C\mathrm{e}^{-t^2} ,\ C \in \mathbb{R} \right\} .$$
2. Soit y_0 un réel. Démontrer que l'équation différentielle $y'(t) + 2ty(t) = 0$ admet une unique solution telle que $y(0) = y_0$, et donner l'expression de cette solution en fonction de y_0.
3. Vérifier que l'équation différentielle $y'(t) + 2ty(t) = 2t$ admet la fonction constante $t \mapsto 1$ comme solution. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y(t)y'(t) + ty^2(t) = t$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y(t)y'(t) + ty^2(t) = t$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 1 : Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation différentielle (E) suivante.
$$(E) \qquad 2t(1+t)y'(t) + (1+t)y(t) = 1 .$$

1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant -1. Montrer que (E) n'admet pas de solution sur I.
2. On considère l'équation $(E_1)\ :\ 2ty'(t) + y(t) = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est :
$$\left\{ t \mapsto \frac{C}{\sqrt{t}} ,\ C \in \mathbb{R} \right\} .$$

3. Montrer que y est solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $t \mapsto y(-t)$ est solution de (E_1) sur $]-\infty, 0[$. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) sur $]-\infty, 0[$, puis l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}^*$.
4. Utiliser la méthode de variation de la constante pour démontrer que la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est :
$$\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} + \frac{C}{\sqrt{t}}\,,\ C \in \mathbb{R}\ .$$
5. Utiliser la méthode de variation de la constante pour démontrer que la solution générale de (E) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0[$ est :
$$\frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| + \frac{C}{\sqrt{-t}}\,,\ C \in \mathbb{R}\ .$$
6. Montrer que :
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 1\ .$$
7. Soit y_0 la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| & \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si} \quad x \in]0, +\infty[\ . \end{cases}$$
Démontrer que y_0 est continue sur $]-1, +\infty[$. On admettra que y_0 est continûment dérivable. Montrer qu'elle est l'unique solution de (E) sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 2 : Le but de l'exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) suivante.
$$(E) \qquad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2+1)\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{2t}\ .$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.
2. Déterminer les trois réels a, b, c tels que $t \mapsto (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^t$ est solution de l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2+1)\mathrm{e}^t$.
3. Déterminer le réel α tel que $t \mapsto \alpha t^2 \mathrm{e}^{2t}$ est solution de l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$.
4. Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).

Exercice 3 : Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) suivante.

$$(E) \qquad y'(t) + 3y(t) + y^2(t) + 2 = 0 \; .$$

1. Vérifier que (E) admet deux solutions constantes que l'on déterminera.
2. Soit y une solution de (E). On pose $z(t) = 1/(y(t)+1)$. Montrer que $z(t)$ est solution de l'équation différentielle $z'(t) - z(t) - 1 = 0$.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Soit y une solution de (E). On pose $u(t) = 1/(y(t)+2)$. Montrer que $u(t)$ est solution de l'équation différentielle $u'(t) + u(t) - 1 = 0$. En déduire la solution générale de (E) et retrouver le résultat de la question précédente.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Multiplions les deux membres de l'équation par e^{t^2} (qui est strictement positif pour tout t) :

   $$y'(t) + 2ty(t) = 0 \iff y'(t)\mathrm{e}^{t^2} + 2t\mathrm{e}^{t^2}y(t) = 0 \; .$$

   Or le premier membre est la dérivée en t de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}y(t)$. Cette dérivée est nulle si et seulement si la fonction est constante sur $\mathbb{R}$. Donc y est solution de l'équation si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $$y(t)\mathrm{e}^{t^2} = C \iff y(t) = C\mathrm{e}^{-t^2} \; .$$

2. D'après la question précédente, $y(t)$ est solution de $y'(t) + 2ty(t) = 0$, si et seulement si il existe une constante C telle que $y(t) = C\mathrm{e}^{-t^2}$. Nous devons vérifier qu'il existe une unique constante C telle que $y(0) = y_0$. On trouve immédiatement $C = y_0$. La solution cherchée est donc :

   $$y(t) = y_0\mathrm{e}^{-t^2} \; .$$

3. La fonction $t \mapsto 1$, de dérivée nulle, vérifie bien l'équation proposée : $0+2t\times 1 = 2t$. La fonction y est solution de l'équation $y'(t)+2ty(t) = 2t$ si et seulement si $y-1$ est solution de l'équation $y'(t) + 2ty(t) = 0$. Donc l'ensemble des solutions de $y'(t) + 2ty(t) = 2t$ est :

   $$\left\{ t \mapsto 1 + C\mathrm{e}^{-t^2} \; , \; C \in \mathbb{R} \right\} \; .$$

4. Multiplions les deux membres par 2 :

$$2y(t)y'(t) + 2ty^2(t) = 2t \iff (y^2)'(t) + 2ty^2(t) = 2t \;.$$

Donc y est solution de l'équation proposée si et seulement si y^2 est solution de l'équation de la question précédente, donc si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$y^2(t) = 1 + C\mathrm{e}^{-t^2} \;.$$

Comme $y^2(t) \geqslant 0$, $1 + C\mathrm{e}^{-t^2}$ doit être positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est vrai si et seulement $C \geqslant -1$. L'ensemble des solutions de $y(t)y'(t) + ty^2(t) = t$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ t \mapsto \sqrt{1 + C\mathrm{e}^{-t^2}}\;,\; C \in [-1, +\infty[\right\} .$$

5. Ici, $1 + C\mathrm{e}^{-t^2}$ doit être positif ou nul pour tout $t \in]-1, 1[$. C'est vrai si et seulement si $C \geqslant -\mathrm{e}$. Donc l'ensemble des solutions de $y(t)y'(t) + ty^2(t) = t$ sur $]-1, 1[$ est :

$$\left\{ t \mapsto \sqrt{1 + C\mathrm{e}^{-t^2}}\;,\; C \in [-\mathrm{e}, +\infty[\right\} .$$

Exercice 1 :

1. Pour $t = -1$, le premier membre de (E) s'annule, et le second membre vaut 1. Aucune fonction y ne peut donc vérifier l'équation en $t = -1$.
2. Il s'agit d'une équation linéaire sans second membre. Pour retrouver la solution générale sans utiliser la formule, on peut procéder comme suit (pour $t > 0$).

$$\begin{aligned}
\frac{y'(t)}{y(t)} &= -\frac{1}{2t} \\
\ln|y(t)| &= -\frac{1}{2}\ln|t| + \ln(C) = \ln\left(\frac{C}{\sqrt{t}}\right) \\
y(t) &= \frac{C}{\sqrt{t}} \;.
\end{aligned}$$

3. Soit y une fonction vérifiant $2ty'(t) + y(t) = 0$ pour tout $t > 0$. Pour tout $t < 0$, posons $z(t) = y(-t)$. Alors $z'(t) = -y'(-t)$ et on sait que $(-2t)y'(-t) + y(-t) = 0$. Donc $2tz'(t) + z(t) = 0$. Réciproquement, si z vérifie $2tz'(t) + z(t) = 0$ pour tout $t < 0$, alors la fonction y définie par $y(t) = z(-t)$ vérifie $2ty'(t) + y(t) = 0$, pour la même raison. L'ensemble des solutions de l'équation sur $]-\infty, 0[$ est donc :

$$\left\{ t \mapsto \frac{C}{\sqrt{-t}}\;,\; C \in \mathbb{R} \right\} .$$

Une fonction y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{\sqrt{t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ \dfrac{C_2}{\sqrt{-t}} & \text{si} \quad t < 0 \;. \end{cases}$$

4. Pour $t > 0$, posons :

$$y(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{t}} \implies y'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{C(t)}{2t\sqrt{t}} \;.$$

Donc :

$$2ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t+1} \implies C'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t(t+1)} \;.$$

Pour le calcul de la primitive, nous devons effectuer le changement de variable $\sqrt{s} = u$, soit $1/(2\sqrt{s})\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}u$.

$$C(t) = \int_c^t \frac{\sqrt{s}}{2s(s+1)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan(u)\Big]_{\sqrt{c}}^{\sqrt{t}} = \arctan(\sqrt{t}) + C \;.$$

La solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est :

$$\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} + \frac{C}{\sqrt{t}}\,,\; C \in \mathbb{R} \;.$$

5. Pour $t < 0$, posons :

$$y(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{-t}} \implies y'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{C(t)}{2t\sqrt{-t}} \;.$$

Donc pour $t \neq -1$:

$$2ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t+1} \implies C'(t) = \frac{\sqrt{-t}}{2t(t+1)} \;.$$

Pour le calcul de la primitive, nous devons effectuer le changement de variable $\sqrt{-s} = u$, soit $-1/(2\sqrt{-s})\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_c^t \frac{\sqrt{-s}}{2s(s+1)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\sqrt{-c}}^{\sqrt{-t}} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_{\sqrt{c}}^{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| + C \;. \end{aligned}$$

La solution générale de (E) sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0[$ est :

$$\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|+\frac{C}{\sqrt{-t}}\;,\;C\in\mathbb{R}\;.$$

6. On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\;.$$

Donc :

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\ln(1+\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}=-\lim_{t\to 0^-}\frac{\ln(1-\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}=1\;.$$

On en déduit :

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0^-}\frac{\ln(1+\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}-\frac{\ln(1-\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}\right)=1\;.$$

Pour $t>0$, on sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1\;.$$

On en déduit :

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\arctan(y)}=1\implies\lim_{y\to 0}\frac{\arctan(y)}{y}=1\;.$$

En remplaçant y par $\sqrt{t}$:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=1\;.$$

7. D'après la question précédente, la limite à gauche et la limite à droite en 0 sont égales à $1=y_0(0)$. Donc y_0 est continue en 0. L'équation (E) est satisfaite en $t=0$, puisque $y_0(0)=1$. Donc y_0 est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.
   Toute solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ doit aussi être solution de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Or parmi les solutions de (E) sur $]-1,0[$, y_0 est la seule à avoir une limite à gauche finie en 0. De même sur $]0,+\infty[$, y_0 est la seule à avoir une limite à droite finie en 0. Donc y_0 est la seule solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 2 :

1. L'équation caractéristique associée est $r^2-4r+4=0$, qui admet 2 comme racine double. Donc l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est :

$$\left\{\,t\mapsto \mathrm{e}^{2t}(C_1+C_2t)\;,\;C_1,C_2\in\mathbb{R}\,\right\}\;.$$

2. Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique associée, on sait que l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2+1)\mathrm{e}^t$ admet comme solution le produit de e^t par un polynôme de même degré que (t^2+1).

$$\begin{array}{rcl} y(t) &=& \mathrm{e}^t(at^2+bt+c)\\ y'(t) &=& \mathrm{e}^t(at^2+(b+2a)t+(c+b))\\ y''(t) &=& \mathrm{e}^t(at^2+(b+4a)t+(2a+2b+c))\\ \hline y''(t)-4y'(t)+4y(t) &=& \mathrm{e}^t\Big(at^2+(b-4a)t+(2a-2b+c)\Big)\ . \end{array}$$

D'où le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} a & & &=& 1\\ -4a & +b & &=& 0\\ 2a & -2b & +c &=& 1 \end{array}\right.$$

La solution de ce système est $a=1$, $b=4$ et $c=7$.

3. Comme 2 est solution double de l'équation caractéristique associée, l'équation $y''(t)-4y'(t)+4y(t) = \mathrm{e}^{2t}$ admet comme solution le produit de e^{2t} par un polynôme de degré 2. Mais comme toutes les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}(C_1+C_2t)$ vérifient l'équation sans second membre, il suffit de chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha t^2\mathrm{e}^{2t}$.

$$\begin{array}{rcl} y(t) &=& \alpha t^2\mathrm{e}^{2t}\\ y'(t) &=& \alpha(2t^2+2t)\mathrm{e}^{2t}\\ y''(t) &=& \alpha(4t^2+8t+2)\mathrm{e}^{2t}\\ \hline y''(t)-4y'(t)+4y(t) &=& 2\alpha\mathrm{e}^{2t}\ . \end{array}$$

La solution cherchée s'obtient pour $\alpha = 1$.

4. Par le principe de superposition des solutions, pour avoir la solution générale de (E) nous devons ajouter la solution générale de l'équation sans second membre et les deux solutions obtenues aux questions 2 et 3. La solution générale de (E) est donc :

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_1+C_2t) + (t^2+4t+7)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}\ .$$

Exercice 3 :

1. Si y est une solution constante de (E), alors $y' = 0$ et $y^2+3y+2 = 0$. Cette équation a pour racines $y=-1$ et $y=-2$.
2. Si y est solution de (E), alors en tout point t tel que $y(t)+1 \neq 0$,

$$y'(t) + (y(t)+1) + (y(t)+1)^2 = 0 \iff \frac{y'(t)}{(y(t)+1)^2} + \frac{1}{y(t)+1} + 1 = 0\ ,$$

soit $-z'(t) + z(t) + 1 = 0$, en posant $z(t) = 1/(y(t)+1)$.

3. La solution générale de l'équation $z'(y)-z(t)-1=0$, est $z(t)=-1+C_1\mathrm{e}^t$. Donc la solution générale de (E) est :

$$y(t)=-1+\frac{1}{-1+C_1\mathrm{e}^t}\;,\;C_1\in\mathbb{R}\;.$$

   Observons que le domaine de définition dépend de la constante C_1. Pour $C_1=0$, on retrouve la solution constante $y\equiv 2$. Par contre la solution constante $y\equiv -1$ n'est pas parmi les solutions trouvées, mais on peut la voir comme un « cas limite » $C_1=\pm\infty$.

4. Si y est solution de (E), alors en tout point t tel que $y(t)+2\neq 0$,

$$y'(t)-(y(t)+2)+(y(t)+2)^2=0\iff\frac{y'(t)}{(y(t)+2)^2}-\frac{1}{y(t)+2}+1=0\;,$$

   soit $-u'(t)-u(t)+1=0$, en posant $u(t)=1/(y(t)+2)$.
   La solution générale de l'équation $u'(y)+u(t)-1=0$, est $u(t)=1+C_2\mathrm{e}^{-t}$. Donc la solution générale de (E) est :

$$y(t)=-2+\frac{1}{1+C_2\mathrm{e}^{-t}}\;,\;C_2\in\mathbb{R}\;.$$

   Cette solution générale est différente de celle de la question précédente, puisque ici, la solution constante -1 est obtenue pour $C_2=0$, alors que la solution constante -2 est le « cas limite » $C_2=\pm\infty$. En dehors de ces deux valeurs particulières, les solutions trouvées sont bien les mêmes. En effet :

$$\begin{aligned}-2+\frac{1}{1+C_2\mathrm{e}^{-t}} &= \frac{-1-2C_2\mathrm{e}^{-t}}{1+C_2\mathrm{e}^{-t}}\\ &= \frac{\frac{1}{C_2}\mathrm{e}^t+2}{-\frac{1}{C_2}\mathrm{e}^t-1}\\ &= \frac{2-C_1\mathrm{e}^t}{-1+C_1\mathrm{e}^t}=-1+\frac{1}{-1+C_1\mathrm{e}^t}\;,\end{aligned}$$

   en posant $C_1=-1/C_2$.

3 Compléments

3.1 Chaînette, tractrice et brachistochrone

D'après certains auteurs, l'histoire des équations différentielles commence en 1675, le jour où Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), co-inventeur du calcul différentiel avec Newton, écrit :

$$\int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \; .$$

Ne vous moquez pas, c'était un pas de géant. Jusque-là personne n'avait vu le rapport entre le calcul des tangentes à une courbe, et le calcul des surfaces délimitées par une autre courbe. Très vite Newton proposa de ranger les nombreux problèmes issus de la mécanique en trois classes :

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$
2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$
3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$

La première classe concerne le calcul direct de primitives. De la seconde relèvent les équations diférentielles « ordinaires » étudiées dans ce chapitre. La troisième classe fait partie de ce que l'on appelle aujourd'hui les *équations aux dérivées partielles*. Les nouveaux outils se révélèrent extrêmement puissants pour aborder tous ces problèmes. Leur résolution allait occuper pratiquement tout le XVIIIe siècle, avec d'abord les contributions de Leibniz lui-même, puis ses émules Suisses, les frères Bernoulli, et plus tard Euler (1707-1783), puis en France Lagrange (1736-1813) et d'Alembert (1717-1783). On peut dire qu'en 1775, un siècle après la découverte du calcul différentiel, l'essentiel des méthodes de résolution explicite d'équations différentielles avait été trouvé.

Nous allons traiter deux problèmes de mécanique, qui suscitèrent une réelle compétition chez les mathématiciens du début du XVIIIe siècle.

La *chaînette* est la courbe que décrit une chaîne ou une corde très souple lorsqu'on la suspend par ses deux extrémités (figure 6). Considérons que la position de la corde est rapportée à un repère dans le plan vertical, et examinons la portion de corde comprise entre les abscisses t et $t + \mathrm{d}t$. Lorsque la corde est immobile, trois forces s'équilibrent pour cette portion : la traction de la partie gauche de la corde, le poids du tronçon entre t et $t + \mathrm{d}t$, et la traction de la partie droite. Donc la différence entre les composantes verticales des tractions à gauche et à droite doit équilibrer le poids du tronçon. Désignons par $y(t)$ la hauteur du tronçon d'abscisse t. Les tractions gauche et droite s'exercent tangentiellement en chaque point de la courbe ; leur composante verticale est proportionnelle à la dérivée de y. La différence entre la traction à droite et à gauche s'écrit :

$$y'(t + \mathrm{d}t) - y'(t) \simeq y''(t) \, \mathrm{d}t \; .$$

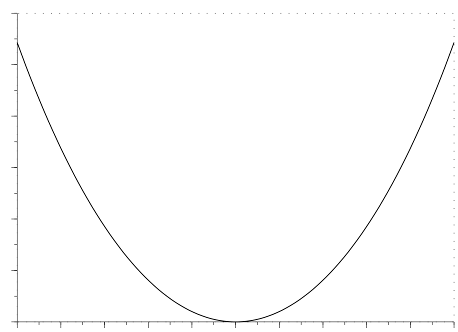

FIG. 6 – La chaînette.

Si la corde est supposée homogène, le poids du tronçon entre t et $t+\mathrm{d}t$ est proportionnel à sa longueur, qui d'après le théorème de Pythagore vaut :

$$\sqrt{\mathrm{d}t^2 + (y(t+\mathrm{d}t) - y(t))^2} \simeq \mathrm{d}t\sqrt{1+(y'(t))^2}$$

La dérivée de y est donc solution de l'équation du premier ordre :

$$y'' = \omega\sqrt{1+(y')^2}\ ,$$

où ω est un coefficient de proportionnalité. L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\Big\{\, t \mapsto y(t) = \sinh(\omega x + C)\,,\ C \in \mathbb{R} \,\Big\}\ .$$

Rappelons que le sinus et le cosinus hyperboliques sont définis par :

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ .$$

Si comme sur la figure 6 on a choisi le repère de sorte que pour $t=0$ la tangente soit horizontale et l'ordonnée nulle ($y'(0) = y(0) = 0$), alors :

$$y'(t) = \sinh(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{\omega}(\cosh(\omega t) - 1)\ .$$

Voici maintenant le problème de la tractrice. Un enfant marche au bord d'un bassin rectiligne, en tirant un bateau au bout d'une corde. Au départ, la corde est perpendiculaire au bord du bassin. L'enfant se déplace à vitesse constante, et la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde, qui reste toujours tendue. Quelle est la trajectoire du bateau dans le bassin ?

Choisissons un repère orthonormé du plan, dans lequel le bord du bassin est sur l'axe horizontal, et l'origine au point où l'enfant commence à marcher (figure 7).

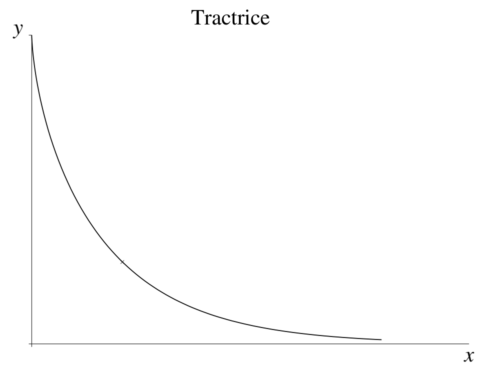

FIG. 7 – La tractrice.

À l'instant 0, le bateau se trouve donc au point d'abscisse 0 et d'ordonnée L, la longueur de la corde. Notons $(x(t), y(t))$ la position du bateau à l'instant t. Soit v la vitesse à laquelle marche l'enfant. À l'instant t, l'enfant se trouve au point $(vt, 0)$ et la corde est tendue. Donc :

$$(x(t) - vt)^2 + y^2(t) = L^2 \ ,$$

soit en dérivant :

$$(x'(t) - v)(x(t) - vt) + y'(t)y(t) = 0 \ .$$

D'autre part le vecteur vitesse du bateau, $(x'(t), y'(t))$ est colinéaire au vecteur allant du bateau à l'enfant, donc :

$$x'(t)y(t) - y'(t)(x(t) - vt) = 0 \ .$$

On obtient un système de deux équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (x'(t) - v)(x(t) - vt) + y'(t)y(t) & = & 0 \\ x'(t)y(t) - y'(t)(x(t) - vt) & = & 0 \ . \end{array}\right.$$

Multiplions la première équation par $(vt - x(t))$, la seconde par $y(t)$ et ajoutons : les termes en $y'(t)$ disparaissent et on obtient :

$$x'(t)y^2(t) + (x'(t) - v)(x(t) - vt)^2 = 0 \ .$$

Or $y^2(t) = L^2 - (x(t) - vt)^2$:

$$x'(t)(L^2 - (x(t) - vt)^2) + (x'(t) - v)(x(t) - vt)^2 = 0 \ .$$

Après simplification on obtient :

$$x'(t) = \frac{v}{L^2}(x(t) - vt)^2 \tag{9}$$

Cette équation, où $x'(t)$ s'exprime par une expression quadratique en $x(t)$, est une *équation de Riccati*. Jacopo Riccati (1676-1754), un comte italien de la région de Venise, a montré que ce type d'équations apparaissait naturellement dans différents problèmes, mais il s'est bien gardé de les résoudre, laissant cela à Johann Bernoulli et Leonhard Euler. Puisque nous en sommes à comparer des exploits, signalons que la comtesse Elisabetta dei Conti d'Onigo, épouse Riccati, a porté 18 enfants, dont 9 ont vécu et 2 ont même laissé un nom dans l'histoire, l'un de la physique, l'autre de la musique. Madame Euler née Katharina Gsell en revanche n'a eu « que » 12 enfants dont 5 ont vécu. Il est vrai que Riccati a moins de réalisations mathématiques à son actif que son successeur Euler.

Revenons à l'équation de la tractrice (9). Elle a une solution naturelle, $x_0(t) = vt-L$. C'est ce qui se passerait si le bateau partait au bord du bassin, tiré horizontalement par l'enfant. Posons :

$$z(t) = \frac{1}{x(t) - x_0(t)} = \frac{1}{x(t) - vt + L} \;.$$

Cette nouvelle fonction est solution de l'équation linéaire suivante.

$$z'(t) = \frac{2v}{L} z(t) - \frac{v}{L^2} \;.$$

La solution générale est $z(t) = C\mathrm{e}^{2vt/L} + 1/(2L)$. Si le bateau démarre au point $(0, L)$, alors $z(0) = 1/L$. On obtient :

$$x(t) = L\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2vt/L}}{1+\mathrm{e}^{2vt/L}}\right) + vt = vt - L\tanh(vt/L) \;.$$

On en déduit alors :

$$y(t) = \frac{L}{\cosh(vt/L)} \;.$$

De nombreuses courbes issues de la mécanique furent ainsi étudiées tout au long du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, et elles portent depuis des noms qui rappellent leur origine.

- *vélaire :* courbe d'une voile gonflée par le vent.
- *elastica :* courbe que forme une poutre élastique fixée à une seule de ses extrémités.
- *isochrone :* courbe le long de laquelle un corps tombe avec une vitesse uniforme.
- *brachistochrone :* courbe le long de laquelle un corps tombe d'un point à un autre en temps minimum.

3.2 Les frères Bernoulli

La famille Bernoulli est un phénomène unique : sur trois générations, pas moins de neuf d'entre eux ont laissé un nom dans l'histoire des sciences. La figure 8 montre leurs

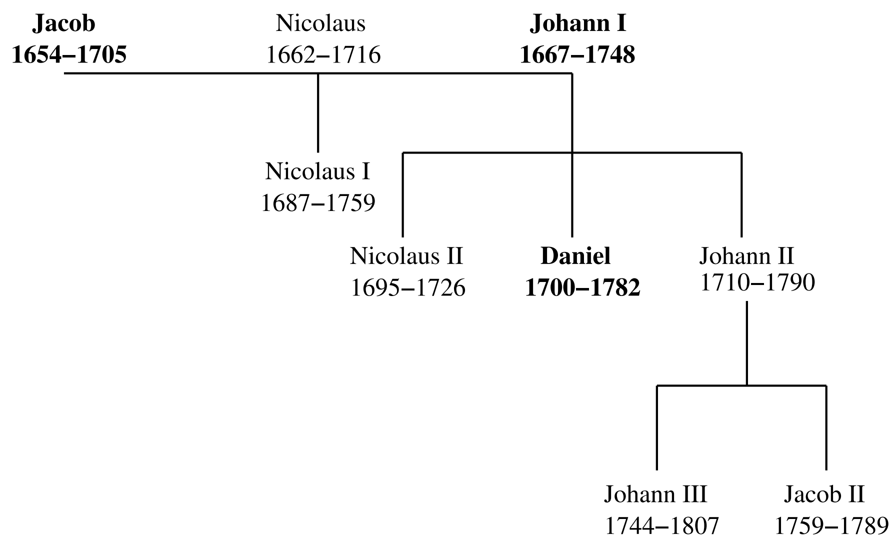

FIG. 8 – La dynastie des Bernoulli.

liens de famille ; les trois plus importants, Jacob (Jacques), Johann I (Jean) et Daniel, apparaissent en gras.

Leurs aïeux avaient quitté Anvers vers 1567 pour fuir vers un pays protestant les persécutions du pouvoir catholique. Fixée à Bâle dès le début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, la famille s'enrichit, et figura bientôt parmi les notabilités de la ville. S'ils restèrent globalement attachés à la Suisse, les Bernoulli surent profiter de l'esprit d'ouverture de leur époque pour voyager, et nouer des contacts avec toute l'Europe scientifique.

Curieusement, aucun d'entre eux n'était destiné de prime abord aux mathématiques ou à la physique. Médecine, droit ou théologie, leurs études semblent les éloigner des mathématiques, qu'ils finiront par rejoindre pour suivre l'exemple de leurs pères... malgré la volonté de ces derniers. Quand selon l'usage de l'époque, Jacob se choisit une devise latine, ce fut « *Invito patre sidera verso* » (je suis parmi les astres malgré mon père). Son jeune frère Johann, ayant refusé les études de commerce auxquelles ce même père le destinait, ne put le convaincre de le laisser étudier les mathématiques « qui suscitèrent en [lui] une excitation singulière ». Un compromis fut trouvé : il suivit des études de médecine. Pourtant, il ne résista pas longtemps à son excitation singulière, et se fit bientôt connaître comme mathématicien. Une génération plus tard, il reproduisit sur le plus brillant de ses fils l'erreur de son propre père : Daniel fit lui aussi des études de médecine avant de se consacrer aux mathématiques.

On rencontre si souvent des lois de Bernoulli, équations de Bernoulli, conditions de Bernoulli et autres théorèmes de Bernoulli, qu'on en oublie parfois que tout n'est pas dû au même ! Il n'est pas toujours évident de mettre un prénom sur chaque résultat de la famille Bernoulli. C'est d'autant plus difficile quand il s'agit d'équations différentielles : Jacob, Johann et Daniel sont tous les trois auteurs de découvertes importantes (les équations de Bernoulli dont il a été question dans ce chapitre sont celles de Johann). Pourtant, la solidarité familiale n'était pas toujours de mise, très loin de là : leurs querelles de préséance à propos de leurs découvertes scientifiques respectives sont restées célèbres.

Jacob, de 13 ans plus âgé que son frère Johann, considérait que celui-ci lui devait tout. Johann, rapide et brillant, n'avait pas attendu Jacob pour se faire remarquer. Dans son autobiographie, Johann minimise le rôle de son frère[1] :

> Ce fut pendant ce temps là, qu'à l'imitation et l'inclination de feu mon frère Jacques, je commençai à m'appliquer à l'étude des mathématiques. [...] En moins de deux ans non seulement je m'étais rendu familiers presque tous les anciens auteurs qui ont écrit sur les mathématiques, mais aussi les modernes, comme la géométrie de Descartes et son Algèbre avec ses Commentaires.

Il est sûr qu'au début leur collaboration fut extrêmement fructueuse. Ayant découvert en 1684 le calcul différentiel de Leibniz, ils en devinrent aussitôt les plus ardents propagandistes, et ils l'utilisèrent pour résoudre par des équations différentielles plusieurs problèmes importants de mécanique. Parmi eux le problème de la chaînette. Galilée avait déjà considéré cette courbe, formée par une chaîne ou une corde attachée par ses deux extrémités à deux points fixes, et avait suggéré que c'était une parabole. Or ce n'est pas le cas. Dès qu'ils surent que Leibniz avait résolu le problème, les deux frères s'acharnèrent, et Johann réussit à en donner une solution, publiée en 1691. La manière dont en 1718 il raconte sa découverte, donne une bonne idée de l'esprit de compétition entre les deux frères.

> Les efforts de mon frère furent sans succès [...] pour moi je fus plus heureux, car je trouvai l'adresse (je le dis sans me vanter, pourquoi cacherais-je la vérité ?) de le résoudre pleinement et de le réduire à la rectification de la parabole. Il est vrai que cela me coûta des méditations qui me dérobèrent le repos d'une nuit entière ; c'était beaucoup pour ce temps-là et pour le peu d'âge et d'exercice que j'avais, mais le lendemain, tout rempli de joie, je courus chez mon frère, qui luttait encore misérablement avec ce nœud gordien sans rien avancer, soupçonnant toujours comme Galilée que la chaînette était une parabole ; Cessez ! Cessez ! – lui dis-je – ne vous tourmentez plus à chercher l'identité entre la chaînette et la parabole, là où il n'y en a point. Celle-ci aide bien à construire l'autre, mais ce sont deux courbes aussi différentes que peuvent l'être une courbe algébrique et une transcendante, j'ai développé tout le mystère ; ayant dit cela je lui montrai ma solution et découvris la méthode qui m'y avait conduit.

Cette émulation confiante et bon enfant ne dura pas. Au fil des années, leurs rapports se dégradèrent. Johann prit son indépendance en acceptant un poste de professeur à

[1] Citations extraites de Jeanne Peiffer : Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann, *J. Elect. Hist. Probab. Stat., vol.2/1 (Juin 2006).*

Groningen, et la brouille devint définitive. Il ne revint à Bâle qu'après le décès de son frère... pour occuper la chaire de mathématiques que celui-ci laissait vacante à l'université. Comme exemple des amabilités qu'ils échangèrent à distance, voici un extrait d'une lettre de Johann au marquis Guillaume de L'Hôpital à propos de Jacob.

> C'est un misanthrope général qui n'épargne même pas son frère... Il crève de rage, de haine, d'envie et de jalousie contre moi, il m'en veut du mal à cause que vous m'en voulez du bien, il me persécuta dès le moment que vous m'avez fait l'honneur d'une pension, il croit que cela fait du tort à sa vaine réputation, ne pouvant pas souffrir que moi qui suis le cadet soit aussi bien estimé que lui qui est l'aîné, enfin que ce serait avec le plus grand plaisir de me voir dans l'état le plus misérable et réduit à l'extrémité. Quelle indignité à un frère ! Quel exécrable orgueil !

Jacob ne se manifestait pas par ce genre d'explosion de colère, fréquentes chez son cadet. Il était plus mesuré, plus prudent, communiquait moins, mais par ses critiques indirectes et ses remarques perfides, il n'en était sans doute pas moins blessant. À plusieurs reprises, il proposa des problèmes, avec récompense promise, dans l'espoir que son cadet tomberait dans le piège habituel de sa précipitation, et donnerait une solution fausse ou incomplète. Il s'en délectait alors sournoisement :

> ... j'avais encore des raisons particulières pour souhaiter qu'il [Johann] y pût y réussir et gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, Monsieur, pour vous faire comprendre le plaisir que j'ai eu à lire la solution de mes problèmes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, et plus encore à y remarquer quelque conformité avec la mienne, laquelle me faisait croire qu'il s'en était acquitté en habile homme. Mais que ce plaisir a duré peu ! Il a été bientôt suivi du chagrin de voir mon attente frustrée, ...

Les querelles de famille ne cessèrent pas avec la mort de Jacob : bientôt Daniel, un des fils de Johann, commença à faire parler de lui et à marcher sur les plates-bandes de son père. En 1734, furieux de devoir partager avec son fils un prix de l'Académie des Sciences de Paris, Johann expulsa Daniel de chez lui ! Quatre ans plus tard, quand Daniel publia son œuvre majeure « *Hydrodynamica* », son père en fut si jaloux qu'il se dépêcha d'écrire son « *Hydraulica* », anti-daté de deux ans, et prétendit être l'inventeur de la mécanique des fluides. Il ne trompa pas grand'monde et se ridiculisa, mais Daniel ne se remit jamais vraiment de la trahison de son père.

... Mais peut-être préférerez-vous ne retenir de Jacob et Johann que ce qu'en dit un de leurs biographes :

> La portée historique des deux frères Bernoulli [...] atteint en effet presque celle des actes mémorables des grands classiques des sciences mathématiques, à condition qu'on considère ensemble les réalisations des deux frères.

3.3 Dynamique des populations

Il peut sembler paradoxal de modéliser l'évolution dans le temps de la taille d'une population, qui est un nombre entier d'individus, par la solution d'une équation différentielle, qui est nécessairement une fonction continue (et même dérivable). Une population animale évolue par les naissances et les décès, qui la font augmenter ou diminuer chaque fois d'une unité. Mais pour une population de grande taille, et selon l'échelle de temps à laquelle on se place, les variations de la population pourront effectivement apparaître comme continues. Concernant la population humaine sur la terre, de l'ordre de 6 milliards individus, les nombres de naissances et de décès qui ont lieu chaque seconde sont de plusieurs milliers. Ces nombres, même s'ils ne sont pas définis très rigoureusement, sont compris par chacun comme des moyennes sur les secondes contenues dans un intervalle de temps suffisant. Il y a 86 400 secondes dans un jour, $3.15\,10^7$ dans une année. Il est assez raisonnable de penser que les nombres d'individus naissant le 7 décembre 2006 et le 8 décembre 2006, sont assez proches. Parler du nombre d'individus naissant par seconde le 8 décembre 2006 suppose qu'on ne distinguera pas si la seconde a lieu entre 8h et 9h ou entre 16h et 17h. Il est d'ailleurs impossible de connaître toutes les dates de naissance à la seconde près. Le seul sens que l'on puisse donner à la phrase « la population de la terre a augmenté de 30 individus par seconde le 8 décembre 2006 » est : « la population de la terre a augmenté de $2.6\,10^6$ individus ce jour là, ce qui fait une moyenne de 30 par seconde environ ». Mais alors, il faudra bien considérer que dans un intervalle de 2 secondes l'augmentation est de 60, dans un intervalle de 3 secondes 90, etc. Notons $N(t)$ la population de la terre à l'instant t, et choisissons la seconde comme unité de temps. Nous venons de dire que l'accroissement de population dans un intervalle de temps de k secondes, $N(t+k) - N(t)$ vaut $k(N(t+1) - N(t))$. Cela revient bien à considérer le rapport

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

comme constant pour de petites valeurs de h. Ce rapport est appelé *taux de variation* de la population. Lui affecter une valeur donnée, c'est modéliser $N(t)$ comme une fonction dérivable du temps, et le taux de variation est alors la valeur de la dérivée $N'(t)$. De même, on parlera de *taux de naissance* et de *taux de décès* pour les nombres moyens de naissances et de décès par unité de temps, même si on reste conscient du fait qu'il ne s'agit que de moyennes approximatives.

Ce qui précède n'a de valeur que pour modéliser l'évolution de la population à une échelle de temps bien supérieure à la seconde. Plus qu'au nombre exact de naissances ou de décès par seconde, on s'intéresse, pour des raisons de planification économique par exemple, à l'évolution de la population sur les 10 années qui viennent. Il est clair que le taux de variation de la population, s'il vaut 30 par seconde le 8 décembre 2006, pourra changer au cours des dix ans qui viennent, en fonction des ressources naturelles, de la taille de la population elle-même, ou d'autres facteurs, comme la température moyenne de l'atmosphère.

Le modèle différentiel le plus simple, dit « modèle de Malthus », consiste à écrire que les taux de naissance et de décès sont proportionnels à la taille de la population. Il peut sembler évident que plus la population est importante, plus il naît et meurt d'individus par seconde. On introduit les notions de *taux de fertilité* (nombre de naissances par unité de temps et par individu) et de *taux de mortalité* (nombre de décès par unité de temps et par individu), que l'on suppose constants. Ils sont notés β et δ respectivement. Le taux de variation est alors la différence :

$$N'(t) = \beta N(t) - \delta N(t) \ .$$

La solution de cette équation, partant de la population N_0 à l'instant 0 est :

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{(\beta-\delta)t} \ .$$

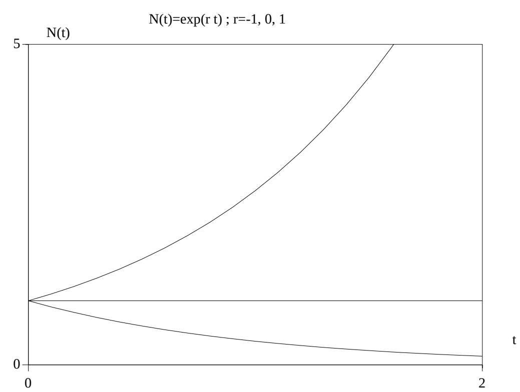

Fig. 9 – Modèle de Malthus.

Si la fertilité l'emporte sur la mortalité ($\beta > \delta$), le modèle de Malthus prévoit une croissance « exponentielle » de la population. Dans le cas $\beta < \delta$, la population doit décroître jusqu'à son extinction. En fait le modèle de Malthus, s'il peut convenir pour des populations isolées de bactéries sur un intervalle de temps court, est beaucoup trop simpliste pour rendre compte de populations interagissant avec leur milieu, comme la nôtre.

Ceci a été reconnu très tôt et d'autres modèles différentiels ont introduit des sophistications supplémentaires dans le calcul du taux de variation. Le modèle de Verhulst, ou *modèle de croissance logistique*, considère que le taux de variation, s'il peut être en gros proportionnel à la taille pour de petites populations, atteindra une valeur maximale pour une certaine taille, puis décroîtra pour s'annuler quand la population atteint une taille critique K, interprétée comme le nombre maximum d'individus que l'environnement peut supporter. Ceci correspond à l'équation :

$$N'(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) \;.$$

Ce modèle prévoit que la population augmente et converge vers sa taille critique (cf. figure 10). Plus précisément :

$$N(t) = \frac{N_0 K \mathrm{e}^{rt}}{K + N_0(\mathrm{e}^{rt} - 1)} \;.$$

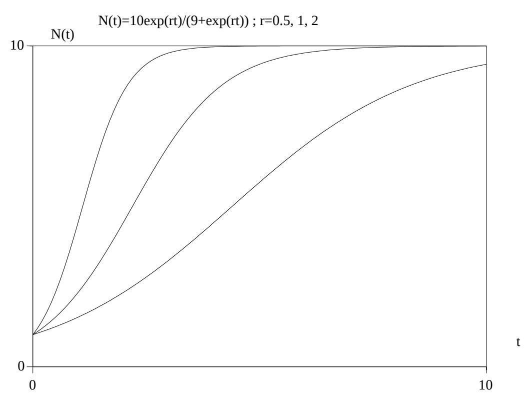

Fig. 10 – Modèle de Verhulst.

De nombreux autres modèles ont été proposés, sous forme d'équations du type :

$$N'(t) = f(N(t)) \;.$$

Dans une étude menée au Canada en 1978 sur les vers du bourgeon de l'épicéa, le modèle était le suivant :

$$N'(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - \frac{BN(t)^2}{A^2 + N(t)^2} \;.$$

Par rapport au modèle de Verhulst, le nouveau terme modélise l'action d'un prédateur sur la population. Si $N(t)$ est faible, le prédateur a peu d'influence sur la croissance. La prédation augmente avec la population, devient significative quand $N(t)$ est de l'ordre de A, pour atteindre rapidement ensuite sa valeur maximale. Les 4 paramètres du modèle sont r (le taux de fertilité sans prédateur), K (la population maximale supportée par l'environnement sans prédateur), A (le seuil de déclenchement de la prédation) et B (qui contrôle l'intensité maximale de prédation). Supposons que le temps soit exprimé en secondes (s), et les nombres d'individus en milliers (m). Alors

$N'(t)$ est mesuré en m/s, r est en $1/s$, $N(t)$, K et A sont mesurés en m et B en m/s. Changer d'unité pour compter la population (par exemple passer du millier à la dizaine de milliers), revient à multiplier $N(t)$ par une constante. De même, changer l'unité de temps (en passant par exemple de la seconde à la minute), revient à multiplier le taux de variation par une autre constante. Or ces changements d'unités ne peuvent pas modifier le comportement qualitatif du modèle. Pour simplifier l'étude, on est amené à effectuer des changements de variables, qui permettent à la fois de diminuer le nombre des paramètres et de donner une forme plus compacte à l'équation. Par exemple, dans le modèle ci-dessus, posons :

$$\tau = \frac{Bt}{A}\;,\; y(\tau) = \frac{N(t)}{A}\;,\; \rho = \frac{Ar}{B}\;,\; q = \frac{K}{A}\;.$$

Remarquons que les nouvelles quantités sont des nombres réels sans unité. Le modèle devient :

$$y'(\tau) = \rho y(\tau)\Big(1 - \frac{y(\tau)}{q}\Big) - \frac{y(\tau)^2}{1 + y(\tau)^2}\;.$$

Cette équation ne contient plus que deux paramètres, ρ et q. Transformer les variables d'un modèle pour se ramener à des variables sans unités se dit « *dédimensionner* ».

Pour aller plus loin dans l'étude de l'influence de la prédation sur une population, il faut inclure dans l'étude la population des prédateurs. Le modèle de Lotka-Volterra est le premier qui en ait tenu compte. Notons $N(t)$ le nombre de proies à l'instant t, et $P(t)$ le nombre de prédateurs. Le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} N'(t) &= \alpha N(t) - \beta N(t)P(t)\;, \\ P'(t) &= \gamma P(t)N(t) - \delta P(t)\;. \end{aligned}$$

Dans les deux taux de variation apparaissent 4 termes, supposés positifs, dont l'interprétation est la suivante :

- $\alpha N(t)$ est le taux d'accroissement de la population, en l'absence de prédateur.
- $\beta N(t)P(t)$ est le taux de prélèvement des proies par les prédateurs.
- $\gamma N(t)P(t)$ est le taux d'accroissement de la population des prédateurs, quand $N(t)$ proies sont disponibles.
- $\delta P(t)$ est le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible.

Les évolutions de $N(t)$ et $P(t)$ prévues par le modèle sont périodiques (figure 11).

Partant d'une situation où les proies sont nombreuses et les prédateurs rares, la population des prédateurs va rapidement augmenter, grâce à l'abondance des ressources. Les prédateurs devenus nombreux, la population des proies déclinera rapidement. Ce déclin entraînera ensuite celui des prédateurs. Les prédateurs redevenus rares, la population des proies pourra augmenter à nouveau. Les généralisations de ce modèle permettent de modéliser plus de deux populations, ou d'inclure d'autres types d'interactions.

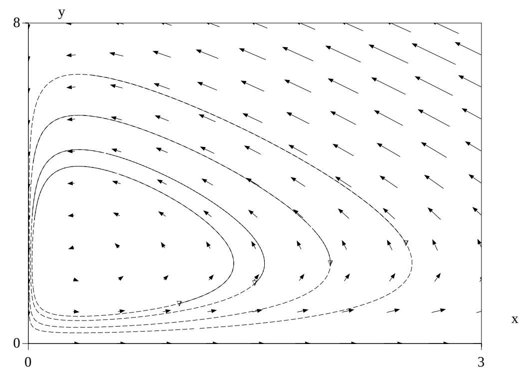

FIG. 11 – Modèle de Lotka-Volterra.

3.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous présentons ici la version la plus simple d'un théorème général d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle.

Toute équation différentielle peut se ramener à une équation d'ordre 1, homogène en temps, quitte à accepter une augmentation de la dimension. De plus pour une telle équation, on peut toujours ramener l'origine du temps en 0. Il est donc naturel de considérer le problème différentiel avec condition initiale suivant, dit « *problème de Cauchy* » :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y'(t) & = & G(Y(t)) \\ Y(0) & = & y_0 \, . \end{array} \right. \tag{10}$$

Dans ce problème, la fonction G est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, la condition initiale y_0 est un point de $\mathbb{R}^d$. Une solution au problème (10) est une fonction dérivable Y de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant (10) pour tout $t > 0$.

Théorème 7. *Supposons que la fonction G soit continûment différentiable, et que ses dérivées partielles soient bornées par une constante M :*

$$\forall i, j = 1, \ldots, d \, , \; \forall y \in \mathbb{R}^d \, , \qquad \left| \frac{\partial G_i}{\partial y_j}(y) \right| \leqslant M \; .$$

Alors il existe une solution unique au problème de Cauchy (10)*, définie sur* $[0, +\infty[$.

Démonstration : Au niveau de ce cours, nous ne pouvons pas faire mieux que donner un bref aperçu des idées qui permettent de démontrer ce résultat.

Pour montrer que le problème de Cauchy (10) admet une solution unique définie sur tout $\mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que pour tout $T > 0$, il admet une solution unique définie sur $[0, T]$. Considérons l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}([0, T])$.

C'est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach). Définissons dans cet espace l'opérateur Φ qui à une fonction continue z associe la fonction $\Phi(z)$ définie par :

$$\forall t \in [0,T]\ , \quad \Phi(z)(t) = y_0 + \int_0^t G(z(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

Observons que Y est solution du problème de Cauchy (10) sur $[0,T]$ si et seulement si $\Phi(Y) = Y$. Nous cherchons donc un point fixe de l'opérateur Φ dans $\mathcal{C}([0,T])$. La démonstration consiste à prouver que si Y_0 est une fonction quelconque, alors la suite des itérés successifs

$$Y_0\ ,\ \Phi(Y_0)\ ,\ \Phi(\Phi(Y_0))\ ,\ldots,\ \Phi^{\circ n}(Y_0)\ ,\ldots$$

converge vers la solution désirée. On utilise pour cela le *théorème du point fixe*.

□

On pourrait penser au vu de ce qui précède que calculer la suite des itérés $\Phi^{\circ n}(Y_0)$ constitue une méthode de calcul approché de la solution Y. Malheureusement, le calcul de $\Phi^{\circ n}(Y_0)$ implique le calcul de n intégrales successives, entraînant des erreurs d'approximations qui se cumulent. Cette méthode n'est donc pas utilisée en pratique.

Exemple : Explicitons le calcul des itérés $\Phi^{\circ n}(Y_0)$ dans un cas particulier :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & ay(t) \\ y(0) & = & y_0\ . \end{array}\right.$$

L'opérateur Φ s'écrit :

$$\Phi(z)(t) = y_0 + \int_0^t az(s)\,\mathrm{d}s\ .$$

Pour $z(t) \equiv y_0$, on obtient $\Phi(z)(t) = y_0 + tay_0$, et par récurrence :

$$\Phi^{\circ n}(z)(t) = \Big(1 + ta + \frac{t^2}{2}a^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}a^n\Big)y_0\ ,$$

qui converge bien vers la solution $\mathrm{e}^{at}y_0$.

3.5 Résolution numérique

Il existe de très nombreuses méthodes numériques de résolution des équations différentielles : plus ou moins précises, plus ou moins coûteuses en temps de calcul, plus ou moins adaptées à tel ou tel type d'équation. Toutes ces méthodes ont été implémentées et les meilleures sont proposées dans les logiciels de calcul standard. Pour comprendre la problématique de la résolution numérique, nous détaillerons seulement la méthode la plus simple, qui est la méthode d'Euler.

Nous nous plaçons dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le problème à résoudre est le problème de Cauchy (10) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & G(Y(t)) \\ Y(0) & = & y_0 \; . \end{array}\right.$$

Nous supposons que les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées : la fonction G est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^d$ et ses dérivées partielles sont bornées. Notre problème est de construire une approximation numérique de la solution. Il faut pour cela *discrétiser* le temps. Nous choisissons donc un *pas de discrétisation* $h > 0$. Les multiples entiers de h sont les *instants de discrétisation*.

Remarque : Dans certains cas, il est judicieux d'adapter la suite des instants de discrétisation aux valeurs de la solution : plus espacés là où la solution varie peu, ils seront plus rapprochés là où la solution varie rapidement. On parle dans ce cas de méthode *à pas adaptatif*.

Notre but est de calculer par récurrence dans $\mathbb{R}^d$ une suite de valeurs z_n qui seront comprises comme des approximations de la fonction aux instants de discrétisation. En ces instants, la solution exacte vérifie :

$$Y((n+1)h) = Y(nh) + \int_{nh}^{(n+1)h} G(Y(s))\,\mathrm{d}s \; .$$

Or si le pas h est petit, la valeur de l'intégrale est proche du produit $hG(Y(nh))$ (la « surface du rectangle » en dimension 1). Il est naturel de définir la suite z_n par $z_0 = y_0$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$z_{n+1} = z_n + hG(z_n) \; .$$

Exemple : Explicitons le calcul des vecteurs z_n dans le cas particulier d'un système linéaire à coefficients constants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & AY(t) \; , \\ Y(0) & = & y_0 \; . \end{array}\right.$$

On a :

$$z_{n+1} = z_n + hAz_n = (I_d + hA)z_n \; .$$

Avec la condition initiale $z_0 = y_0$, on obtient :

$$z_n = (I_d + hA)^n y_0 \; .$$

La fonction censée approcher $Y(t)$ sera notée $Z_h(t)$. Elle est définie entre les instants de discrétisation par une interpolation linéaire :

$$\forall t \in [nh, (n+1)h] \; , \quad Z_h(t) = z_n + (t - nh)G(z_n) \; .$$

Théorème 8. *Supposons que G soit continûment différentiable, ses dérivées partielles étant bornées uniformément par M. Soit Y la solution du problème de Cauchy* (10). *Fixons $T > 0$. Sur l'intervalle compact $[0, T]$, la fonction continue $\|G(Y(t))\|$ atteint son maximum ; notons-le $K(T)$:*

$$K(T) = \sup_{t \in [0,T]} \|G(Y(t))\| .$$

Alors l'erreur maximale sur $[0, T]$ entre la solution approchée Z_h et la solution exacte Y est telle que :

$$\sup_{t \in [0,T]} \|Y(t) - Z_h(t)\| \leqslant \frac{K(T)}{2} \left(\mathrm{e}^{MT} - 1 \right) h . \tag{11}$$

En particulier Z_h converge vers Y uniformément sur $[0, T]$.

La majoration (11) montre que l'erreur commise en remplaçant la solution exacte par la solution approchée est de l'ordre de h, et tend donc vers 0 quand h tend vers 0. La constante multiplicative montre que l'erreur sur $[0, T]$ peut dépendre fortement de T. On comprend intuitivement que, partant d'une condition initiale exacte, les erreurs commises à chaque pas puissent se cumuler, de sorte que l'erreur à l'instant T est exponentielle en T.

Exemple : Considérons le cas de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$: $y'(t) = y(t)$, avec $y(0) = 1$ (figure 12).

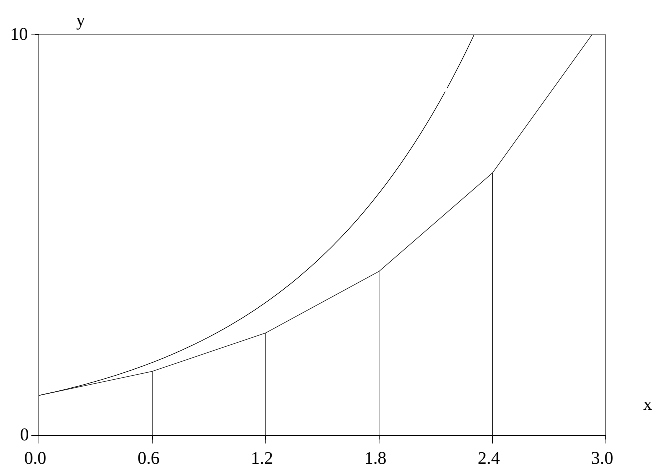

Fig. 12 – Approximation de l'exponentielle par la méthode d'Euler.

La suite approximante est :

$$z_n = (1 + h)^n .$$

$h \setminus nh$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10^{-1}	0.125	0.662	2.636	9.339	31.02	98.95	306.9	932.6	2790.	8246.
10^{-2}	0.013	0.073	0.297	1.074	3.64	11.85	37.47	116.1	354.2	1067.
10^{-3}	0.001	0.007	0.03	0.109	0.37	1.208	3.829	11.89	36.36	109.8

TAB. 1 – Erreurs de la méthode d'Euler sur e^{nh}.

Pour $T = nh$ fixé, la valeur de $Z_h(T)$ est :

$$Z_h(T) = (1+h)^{T/h} = e^T \left(1 + T\frac{h}{2} + o(h)\right) .$$

L'erreur commise est bien de l'ordre de h. Le tableau 1 donne les valeurs de l'erreur $|e^T - Z_h(T)|$, pour $h = 10^{-1}$, 10^{-2} et 10^{-3}, et $T = nh$ allant de 1 à 10. Même pour $h = 10^{-3}$, on constate que l'erreur en $T = 10$ est très importante.

La méthode d'Euler, très facile à programmer et peu coûteuse en temps de calcul, peut suffire pour certaines applications. De nombreuses autres méthodes ont été imaginées. Nous nous contenterons d'indiquer une voie de généralisation.

L'idée de base de la méthode d'Euler était d'approcher :

$$\int_{nh}^{(n+1)h} G(y(s))\,ds \quad \text{par} \quad hG(y(nh)) .$$

Ceci est l'approximation la plus rudimentaire (méthode des rectangles à gauche) pour un calcul d'intégrale. On peut faire beaucoup mieux, par exemple par la méthode des trapèzes. Il s'agit alors d'approcher

$$\int_{nh}^{(n+1)h} G(y(s))\,ds \quad \text{par} \quad \frac{h}{2}\Big(G(y(nh)) + G(y((n+1)h))\Big) .$$

Ceci conduit à définir la suite des valeurs approchées z_n par $z_0 = y_0$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\Big(G(z_n) + G(z_{n+1})\Big) .$$

Sous cette forme, z_{n+1} est définie comme la solution d'une équation, qu'il faut résoudre numériquement. On dit dans ce cas que la méthode est *implicite*. Pour la rendre explicite, on peut remplacer dans le membre de droite z_{n+1} par l'approximation issue de la méthode d'Euler. Cela donne :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\Big(G(z_n) + G(z_n + hG(z_n))\Big) .$$

Ce que l'on obtient est un cas particulier de la méthode de Runge-Kutta. Notons que les calculs seront nécessairement plus coûteux, car ils demandent à chaque pas deux

$h \setminus nh$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10^{-1}	0.004	0.023	0.093	0.337	1.143	3.726	11.81	36.66	112.0	338.1
10^{-2}	0.000	0.000	0.001	0.004	0.012	0.040	0.127	0.394	1.206	3.643
10^{-3}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.012	0.037

TAB. 2 – Erreurs de la méthode de Runge-Kutta sur e^{nh}.

évaluations de la fonction G, au lieu d'une. En revanche, on obtiendra un résultat plus précis : on démontre que l'erreur commise sur un intervalle de temps fixé $[0, T]$ est de l'ordre de h^2, contre h pour la méthode d'Euler.

Exemple : Reprenons le cas de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$: $y'(t) = y(t)$, avec $y(0) = 1$. La suite approximante est solution de l'équation de récurrence :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(z_n + (z_n(1+h)) = z_n\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right),$$

soit :

$$z_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n .$$

Le tableau 2 donne les valeurs de l'erreur $|\mathrm{e}^{nh} - z_n|$, pour $h = 10^{-1}$, 10^{-2} et 10^{-3}, et $T = nh$ allant de 1 à 10. On constate que les erreurs sont beaucoup plus faibles que celles de la méthode d'Euler.

3.6 Le mariage de Sophie Kovalevskaïa

Les deux filles de Vassili Vassilievitch Korvin-Kroukovski rêvaient de voyages, d'études, d'émancipation, bref de liberté. Or en 1868, aucun père n'aurait laissé ses filles parcourir l'Europe. D'ailleurs, où seraient-elles allées ? La Suisse admettait bien des femmes dans ses universités, mais aucune jeune fille (digne de ce nom) n'aurait jamais osé voyagé seule. La solution passait par le mariage : si l'une d'elles se mariait, le jeune couple pourrait partir, accompagné de celle qui resterait célibataire.

L'aînée, Aniouta, souhaitait devenir écrivain. Elle connaissait le grand Fédor Dostoïevski, et fréquentait les milieux nihilistes qui s'opposaient, parfois violemment, au pouvoir tsariste. Or parmi ces jeunes gens aux idées progressistes, commençait à se répandre une solution toute simple à l'émancipation féminine : le mariage blanc. Il suffisait de trouver un candidat aux idées suffisamment larges pour accepter le marché, et le tour était joué : respectabilité sociale contre autonomie garantie pour chacun. Aniouta trouva vite parmi ses relations un candidat possible : Vladimir Onoufrievitch Kovalevski, désireux lui aussi de partir à l'étranger, dans son cas pour étudier la géologie. Elle ménagea une entrevue à laquelle assistait sa jeune sœur Sophia. Le courant ne passa pas vraiment entre Aniouta et Vladimir. Pour masquer la gêne, Sophia se montra brillante, et elle fit si bien que Vladimir ne tarda pas à la demander en mariage. Restait à convaincre le père : en effet, il n'était pas d'usage qu'une cadette se marie avant son aînée ; et puis, mariée ou pas, dix-huit ans c'était un peu jeune pour quitter la maison. Bref, Vassili ne dit pas non, mais il laissa tout de même entendre qu'il faudrait se montrer patient. C'était oublier le caractère de Sophia : elle décida de prendre les choses en main. Un jour où une réception était organisée à la maison familiale, elle ne se présenta pas au repas, et fit savoir à tout le monde qu'elle était trop occupée par les préparatifs de son mariage avec Vladimir. Le père, mis devant le fait accompli, ne pouvait pas se ridiculiser en avouant devant tous ses invités qu'il l'ignorait : il tourna l'incident en annonce officielle et fit semblant d'avoir donné sa bénédiction. Il n'était plus possible de reculer : le mariage eut lieu, et les nouveaux époux, accompagnés d'Aniouta, partirent pour la Suisse, l'Autriche, puis l'Allemagne.

Les capacités extraordinaires de Sophia impressionnèrent plusieurs professeurs, dont Karl Weierstrass. N'ayant pas réussi à obtenir pour elle le droit de s'inscrire à l'université de Berlin, il entreprit de lui donner des cours particuliers. Elle progressa si bien, qu'en 1874 Weierstrass obtint de l'université de Göttingen qu'elle puisse présenter une thèse : un des tout premiers doctorats jamais obtenus par une femme. Elle avait pour cela écrit trois mémoires, dont chacun aurait suffi à un candidat homme pour devenir docteur. Un de ces mémoires portait sur la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle y démontrait un théorème d'existence et d'unicité des solutions. Son résultat généralisait un théorème énoncé par Cauchy en 1848, avec une démonstration plus simple et plus élégante. Ce théorème, une des bases de la théorie des équations aux dérivées partielles, est resté dans l'histoire sous le nom de Cauchy-Kovalevskaïa.

Pendant ce temps-là, et malgré le contrat de mutuelle indépendance clairement énoncé au début de leur mariage, il semble bien que le pauvre Vladimir ait toujours été amoureux de son épouse. D'ailleurs les convenances imposaient de faire semblant. Malgré des disputes fréquentes, Vladimir eut finalement gain de cause. Après la fin de leurs études, ils revinrent en Russie et une petite fille naquit peu de temps après. Le bonheur fut de courte durée. Après quelques années d'inactivité mathématique pendant lesquelles Sophia fit du journalisme, écrivit des nouvelles, et s'occupa de sa fille, le virus des mathématiques la reprit et elle partit en Suède à l'invitation de Gösta Mittag-Leffler. Celui-ci réussit après plusieurs années de lutte à obtenir pour elle un poste de professeur à l'université de Stockholm. Vladimir quant à lui, après avoir perdu tout l'héritage de Sophia dans des spéculations douteuses, et devant les dettes qui s'accumulaient, se suicida.

Sophia Kovalevskaïa fut la première femme professeur d'université et la première femme à obtenir un prix de l'Académie des Sciences de Paris. Elle avait clairement conscience d'être une pionnière, et d'agir par son exemple pour l'émancipation des femmes. Pour donner une idée des oppositions féroces auxquelles elle se heurta, voici ce que dit à son propos le dramaturge August Strindberg. « Un professeur femme est un phénomène pernicieux et déplaisant ; on pourrait même dire, une monstruosité. » Ce n'était pas l'avis de ses collègues et de ses étudiants. Ainsi Mittag-Leffler a-t-il dit d'elle :

> C'est une femme fascinante. Elle est belle, et quand elle parle, une expression de féminité, de douceur et de rare intelligence illumine son visage [...] Comme savante, elle se distingue par la rare clarté et précision avec laquelle elle s'exprime, ainsi que par une extraordinaire rapidité de compréhension. Il est facile de voir la profondeur à laquelle elle a poussé ses études, et je comprends parfaitement pourquoi Weierstrass la considère comme la plus douée de ses élèves.

Sophia Vassilievna Kovalevskaïa mourut d'une pneumonie à 41 ans, probablement sans avoir donné la pleine mesure de ses capacités mathématiques. Elle disait : « Il est impossible d'être mathématicien sans être poète dans l'âme ».