

Fonctions holomorphes

Christine Laurent-Thiébaud

Ceci est le second volet de l'étude des fonctions d'une variable complexe, faisant suite au chapitre sur les fonctions analytiques. Vous aurez besoin de connaissances de base sur la topologie du plan complexe, ainsi que des outils classiques de calcul différentiel et d'intégration.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Fonctions holomorphes	1
1.2	Théorie de Cauchy locale	5
1.3	Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes	11
1.4	Théorie de Cauchy pour les domaines étoilés	18
1.5	Fonctions méromorphes	25
1.6	Théorie de Cauchy globale	34
1.7	Topologie de $\mathcal{H}(U)$ et représentation conforme	41
2	Entraînement	48
2.1	Vrai ou faux	48
2.2	Exercices	51
2.3	QCM	66
2.4	Devoir	68
2.5	Corrigé du devoir	71
3	Compléments	80
3.1	D'illustres inconnus	80
3.2	Le calcul des résidus	83
3.3	La mémoire des Mémoires	85
3.4	Le rossignol et les chenilles	88
3.5	La reconnaissance posthume de Laurent	89
3.6	Fonction zéta et nombres premiers	90

1 Cours

1.1 Fonctions holomorphes

Après quelques rappels sur la différentiabilité des fonctions de deux variables réelles, nous introduisons dans cette section la notion de dérivation au sens complexe pour les fonctions d'une variable complexe.

Rappels

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application, $f = (P, Q)$. L'application f est *différentiable* en (x_0, y_0) s'il existe une application $\mathbb{R}$ -linéaire L de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| \varepsilon(x - x_0, y - y_0)$$

où $\varepsilon(h, k) \rightarrow (0, 0)$ si $\|(h, k)\| \rightarrow 0$. L'application L est notée $df(x_0, y_0)$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

L'identification naturelle φ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(x, y) = x + iy$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de plus $\varphi(a, b)\varphi(x, y) = \varphi(ax - by, bx + ay)$.

Lemme 1. *Soit u une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

- (i) *l'application u est $\mathbb{C}$ -linéaire ;*
- (ii) *il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $u(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$;*
- (iii) *l'application $\tilde{u} = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$ -linéaire et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, i.e. $\tilde{u}$ est une similitude.

Démonstration : Supposons que u est $\mathbb{C}$ -linéaire alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $u(z) = u(1)z$, il suffit donc de poser $\alpha = u(1)$.

Supposons maintenant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $u(z) = \alpha z$ avec $\alpha = a + ib$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \varphi^{-1}(\alpha \varphi(x, y)) \\ &= (ax - by, bx + ay) \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement supposons que $\tilde{u}$ est une similitude de matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alors pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} u(z) &= \varphi \circ \tilde{u} \circ \varphi^{-1}(z) \\ &= \varphi(ax - by, bx - ay) \\ &= \varphi(a, b)z = \alpha z \end{aligned}$$

avec $\alpha = \varphi(a, b)$, de plus l'application $z \mapsto \alpha z$ est clairement $\mathbb{C}$ -linéaire. $\square$

Fonctions holomorphes

Définition 1. Une fonction f à valeurs complexes définie au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 si la limite de $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe quand z tend vers z_0 avec $z \neq z_0$. Cette limite, notée $f'(z_0)$ est la dérivée (complexe) de f en z_0 .

Comme pour les fonctions d'une variable réelle on a les propriétés suivantes :

Proposition 1. 1) Les fonctions définies au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$ -dérivables en z_0 forment une algèbre.

2) Soient f une fonction définie au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et g une fonction définie au voisinage de $f(z_0)$ et $\mathbb{C}$ -dérivable en $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et sa dérivée en z_0 vaut $g'(f(z_0))f'(z_0)$.

3) Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et si $f(z_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de z_0 , $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et $(\frac{1}{f})'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$.

Proposition 2. Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) la fonction $f(z)$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 ;

(ii) la fonction $f(x, y)$ est $\mathbb{R}^2$ -différentiable en (x_0, y_0) et elle satisfait l'équation de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

ou encore, si $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0);$$

(iii) la fonction $f(x, y)$ est $\mathbb{R}^2$ -différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle est $\mathbb{C}$ -linéaire.

Démonstration : (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 , il existe une fonction $\varepsilon_1(\lambda)$ définie au voisinage de 0 telle que

$$f(z_0 + \lambda) = f(z_0) + f'(z_0)\lambda + \lambda\varepsilon_1(\lambda)$$

et $\varepsilon_1(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ on obtient

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f'(z_0)h + if'(z_0)k + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

si $\lambda = h + ik$ avec $\varepsilon_2(h, k) = \frac{h+ik}{|h+ik|}\varepsilon_1(h+ik)$. Par conséquent $f(x, y)$ est $\mathbb{R}^2$ -différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle $df(x_0, y_0)$ vérifie

$$df(x_0, y_0)(h, k) = \widetilde{f'(z_0)}(h + ik),$$

elle est donc $\mathbb{C}$ -linéaire.

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii) D'après le Lemme 1, l'application $df(x_0, y_0)$ est $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ou encore à $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. □

Remarque. Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 , alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Définition 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe sur U si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de U et si l'application $z \mapsto f'(z)$ est continue sur U .

Remarque. On verra plus tard que l'existence de l'application $z \mapsto f'(z)$ implique automatiquement sa continuité.

On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

Propriétés :

- 1) L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U)$;
- 2) Si $f \in \mathcal{H}(U)$ ne s'annule pas sur U , $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(U)$;
- 3) Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes, $g \circ f$ est holomorphe sur U .

Exemples :

- 1) L'application identique $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$;
- 2) L'application $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$;
- 3) L'application polynôme $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$;
- 4) La fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont des polynômes, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des zéros de Q ;
- 5) La somme d'une série entière définit une fonction holomorphe sur le disque ouvert de convergence de la série entière ;
- 6) Les fonctions analytiques sur U sont holomorphes sur U (la réciproque est vraie nous la montrerons dans la section 1.2).

Théorème 1 (d'inversion locale). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert U_0 de z_0 et un voisinage ouvert V_0 de $f(z_0)$ tel que $f : U_0 \rightarrow V_0$ soit bijective, f^{-1} holomorphe et*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{pour tout } z \in U_0.$$

Démonstration : Après identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, le déterminant jacobien de f est donné par

$$J(f)(z) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(z) & \frac{\partial P}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(z) & \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z)\right)^2 = |f'(z)|^2$$

grâce aux équations de Cauchy-Riemann et donc $J(f)(z_0) \neq 0$. Le théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$ affirme alors qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de z_0 et un voisinage ouvert V_0 de $f(z_0)$ tel que $f : U_0 \rightarrow V_0$ soit bijective, f^{-1} est différentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur V_0 et $d(f^{-1})(f(z)) = (df(z))^{-1}$, mais puisque l'application inverse d'une similitude est encore une similitude, l'application f^{-1} est holomorphe sa dérivée vaut $\frac{1}{|f'(z)|^2} \overline{f'(z)} = \frac{1}{f'(z)}$. $\square$

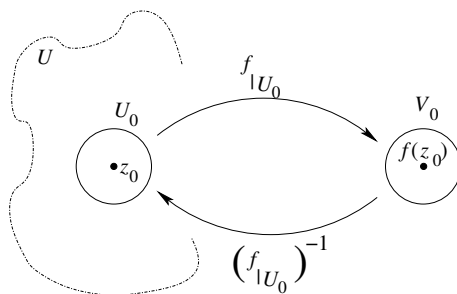


FIGURE 1 – Inversion locale.

1.2 Théorie de Cauchy locale

Le but de cette section est de prouver une première version de la formule de Cauchy, qui est un des éléments clé de la théorie des fonctions holomorphes. Nous en déduirons l'équivalence entre dérivabilité complexe et analyticité pour les fonctions d'une variable complexe. Cette équivalence est spécifique au domaine complexe, en effet toute fonction analytique d'une variable réelle est bien sûr dérivable, mais il existe des fonctions dérivables d'une variable réelle et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas analytiques comme par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Intégrales curvilignes

Définition 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on appelle chemin de classe $\mathcal{C}^1$ (ou arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$) de U une application $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$. On supposera toujours que $a < b$, l'origine de γ est le point $\gamma(a)$, l'extrémité de γ est le point $\gamma(b)$, le chemin est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$. L'image de γ (c'est-à-dire l'ensemble des points $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$) sera notée Γ .

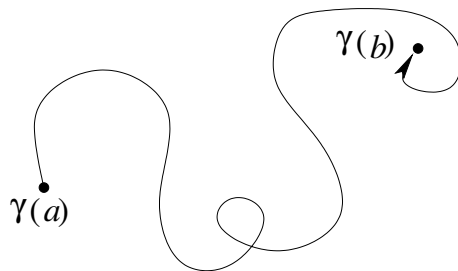


FIGURE 2 – Chemin de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples

- 1) L'application $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = e^{it}$ est un chemin fermé et $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
- 2) L'application $\tilde{\gamma} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est pas un chemin fermé, son origine est 1 et son extrémité est -1 , et $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ mais $\tilde{\gamma} \neq \gamma$.

Définition 4. Deux chemins $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ sont dits équivalents s'il existe une application $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) φ est bijective, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que φ^{-1}
- ii) $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Définition 5. Soit $([a, b], \gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue sur Γ . L'intégrale de f sur γ , notée $\int_\gamma f(z) dz$, est définie par

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Proposition 3. Si $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur Γ , on a

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\delta} f(z) \, dz.$$

Démonstration : La formule du changement de variable dans les intégrales donne

$$\begin{aligned} \int_{\delta} f(z) \, dz &= \int_c^d f(\delta(t)) \delta'(t) \, dt = \int_a^b f(\delta \circ \varphi(s)) \delta'(\varphi(s)) \varphi'(s) \, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds = \int_{\gamma} f(z) \, dz. \end{aligned}$$

□

Remarque. Si $([a, b], \gamma)$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, la longueur L de γ est par définition, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Si f est une fonction continue sur Γ , alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq ML,$$

où L est la longueur de γ et $M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$.

Définition 6. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, un chemin γ sera dit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U s'il existe une subdivision de $[a, b]$ par des points $a_0 = a < a_1 < \dots < a_j < \dots < a_k = b$ telle que les restrictions γ_j de γ à chaque intervalle $[a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, \dots, k$, soient de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$, $j = 0, \dots, k-1$ (γ est constitué de k chemins de classe $\mathcal{C}^1$ mis bout à bout). Si f est une fonction continue sur Γ , on pose

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z) \, dz.$$

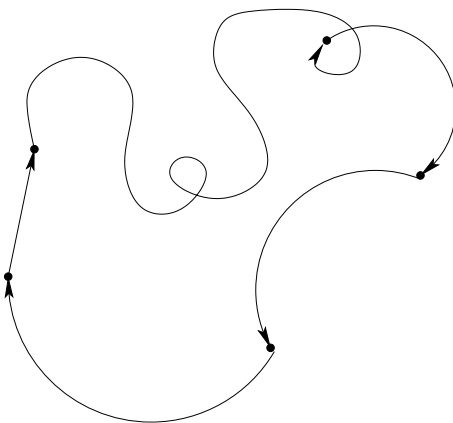
Exemples

• Si $([a, b], \gamma)$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U et f une fonction continue sur U telle que $f = F'$, où F est une fonction holomorphe sur U , on a

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

en particulier si γ est un chemin fermé $\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$.

Par exemple pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $f(z) = (z - \omega)^n$ avec $\omega \notin \Gamma$ vérifie $f = F'$ pour $F(z) = \frac{1}{n+1}(z - \omega)^{n+1}$ et par conséquent $\int_{\gamma} (z - \omega)^n \, dz = 0$ pour tout chemin fermé γ tel que $\omega \notin \Gamma$.

FIGURE 3 – Chemin fermé, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

• Soient $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < 1$, on pose $f_\omega(z) = \frac{1}{z-\omega}$. Nous allons calculer la valeur de $\int_\gamma f_\omega(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-\omega} dt$. Posons $g(s) = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-s\omega} dt$, $s \in [0, 1]$. La fonction $\varphi(s, t) = \frac{ie^{it}}{e^{it}-s\omega}$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. La fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = \frac{i\omega e^{it}}{(e^{it}-s\omega)^2}$ est aussi continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. La théorie des intégrales dépendant d'un paramètre implique, puisque nous intégrons sur un segment, que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. De plus $g(0) = 2i\pi$ et $g(1) = \int_\gamma f_\omega(z) dz$, mais

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} \frac{i\omega e^{it}}{(e^{it}-s\omega)^2} dt = \int_0^{2\pi} -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\omega}{(e^{it}-s\omega)} \right)}_{\Phi(t)} dt = \Phi(0) - \Phi(2\pi) = 0,$$

donc g est constante sur $[0, 1]$ et $g(1) = g(0)$, soit

$$\int_\gamma f_\omega(z) dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 2i\pi.$$

Définition 7. Si γ est un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et z un point du complémentaire de l'image Γ de γ , on appelle indice du chemin γ par rapport à z le nombre

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw.$$

Proposition 4. Soit $[a, b], \gamma$ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'indice du chemin γ par rapport à un point définit une fonction Ind_γ sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

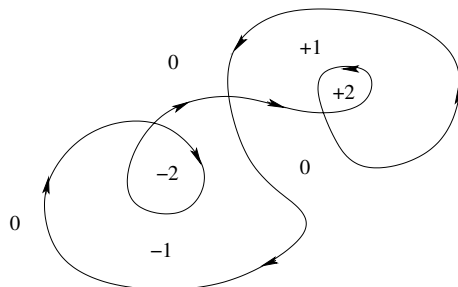


FIGURE 4 – Indice d'un chemin fermé.

Démonstration : Sans perte de généralité on peut supposer que le chemin γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ on considère la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(s) = \exp \left[\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right].$$

Nous allons montrer que la fonction $\psi(s) = \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z}$ est constante sur l'intervalle $[a, b]$. Puisque le chemin γ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et il suffit donc de prouver que $\psi'(s) = 0$ pour tout $s \in [a, b]$. Mais

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(s)(\gamma(s) - z) - \varphi(s)\gamma'(s)}{(\gamma(s) - z)^2}.$$

et $\varphi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \varphi(s)$, par conséquent $\psi'(s) = 0$. Nous obtenons donc $\psi(a) = \psi(b)$ et, puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$ (le chemin γ est fermé), cela donne $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$, soit $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ par définition de φ .

La fonction $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$ est définie comme une intégrale sur le segment $[a, b]$ dépendant du paramètre z . La fonction $(t, z) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ est continue sur $[a, b] \times \mathbb{C} \setminus \Gamma$ donc Ind_γ est continue, de plus elle est à valeurs entières et par conséquent constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Soit R_0 tel que Γ soit contenu dans le disque $D(0, R_0)$. Si $|z| > R_0 + r$, alors $|\gamma(t) - z| > r$ pour tout $t \in [a, b]$ et

$$|\text{Ind}_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z|} dt < \frac{M}{r},$$

avec $M = \frac{b-a}{2\pi} \sup_{t \in [a, b]} |\gamma'(t)|$. On en déduit que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\text{Ind}_\gamma(z)| = 0$ et, puisque $\text{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs entières, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. $\square$

Formule de Cauchy pour les disques

Nous présentons ici un cas particulier de la formule générale de Cauchy. Ce cas particulier est suffisant pour prouver les propriétés élémentaires des fonctions holomorphes qui seront développées dans la section 1.3.

Théorème 2 (Formule de Cauchy). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et $r > 0$ tel que le disque ouvert $D(a, r)$ de centre a et de rayon r soit contenu dans U . On note γ le chemin $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Si f est une fonction holomorphe sur U alors pour tout $z \in D(a, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (1)$$

Démonstration : Quitte à translater et dilater, i.e. remplacer f par $\tilde{f}(z) = f(a + rz)$, on peut se ramener au cas où $a = 0$ et $r = 1$. On doit montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z} dt \quad \text{si } |z| < 1. \quad (2)$$

Posons $g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(z + s(e^{it} - z))e^{it}}{e^{it} - z} \right) dt$ pour $s \in [0, 1]$. On a $|z + s(e^{it} - z)| = |z(1 - s) + se^{it}| < 1 - s + s = 1$, donc $f(z + s(e^{it} - z))$ est bien définie si $0 \leq s \leq 1$. De plus $g(1)$ coïncide avec le second membre de (2) et

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)e^{it}}{e^{it} - z} dt = \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = f(z) \quad \text{si } |z| < 1.$$

On va prouver que la fonction g est constante sur $[0, 1]$. La fonction $\varphi(s, t) = \frac{f(z + s(e^{it} - z))e^{it}}{e^{it} - z}$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. La fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = f'(z + s(e^{it} - z))e^{it}$ est aussi continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. De plus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{is} f(z + s(e^{it} - z)) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t).$$

La théorie des intégrales dépendant d'un paramètre implique, puisque nous intégrons sur un segment, que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que

$$g'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} (\Phi(2\pi) - \Phi(0)) = 0,$$

donc la fonction g est constante sur $[0, 1]$ et $g(1) = g(0) = f(z)$, soit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z} dt.$$

□

Corollaire 1 (Analyticité des fonctions holomorphes). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe dans U est analytique dans U . Si $a \in U$ et si $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$ désigne la distance de a au complémentaire de U , le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est supérieur ou égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$.

De plus si le disque fermé $\overline{D}(a, r)$ est contenu dans U , on a

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a, r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw, \quad (3)$$

où $\mathcal{C}(a, r)$ désigne le chemin défini sur $[0, 2\pi]$ par $t \mapsto a + re^{it}$.

Démonstration : Soit $a \in U$ et $D = D(a, d(a, \mathbb{C} \setminus U))$, D est le plus grand disque de centre a contenu dans U . Soit r tel que $0 < r < d(a, \mathbb{C} \setminus U)$ et $z \in D(a, r)$, alors la formule de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Si $z \in D(a, r)$ et si w vérifie $|w-a| = r$, on a $|z-a| < |w-a|$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \\ &= \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(w)}{(w-a)^{n+1}}.$$

Cette série de fonctions de w est normalement convergente donc uniformément convergente sur $\mathcal{C}(a, r)$ (on utilise ici la même notation pour le chemin et son image) puisque son terme général est majoré par

$$\frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n \quad \text{avec} \quad M = \sup_{w \in \mathcal{C}(a,r)} |f(w)|.$$

On peut donc intégrer terme à terme et on trouve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

La fonction f est donc analytique dans U et la série de Taylor en a de f coïncide avec f au moins sur le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U puisque, si z est dans ce disque, on peut intercaler r entre $|z-a|$ et $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$. $\square$

Remarque. Remarquons que dans le cas des fonctions analytiques réelles le disque de convergence de la série de Taylor en un point n'est pas nécessairement le plus grand disque contenu dans le domaine de définition de la fonction. Il suffit de considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui est analytique sur $\mathbb{R}$ et dont le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 vaut 1.

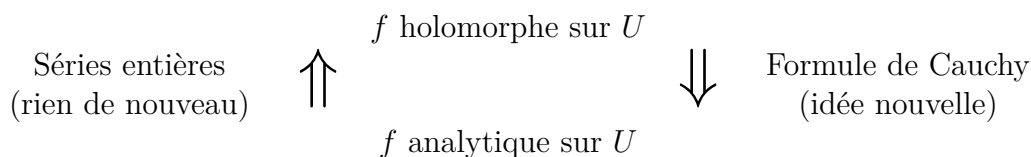
Corollaire 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ alors $f' \in \mathcal{H}(U)$ et f est indéfiniment dérivable.

Démonstration : D'après le Corollaire 1, la fonction f est analytique et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est aussi analytique et par conséquent holomorphe. $\square$

Propriétés. Les fonctions holomorphes étant analytiques elles vérifient :

- le principe du prolongement analytique ;
- le principe des zéros isolés.

Résumé.



1.3 Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

Nous décrivons ici les propriétés des fonctions holomorphes qui sont des conséquences directes de la formule de Cauchy pour les disques.

Inégalités de Cauchy

Le théorème suivant montre que, si f est une fonction holomorphe, toutes les dérivées de f en un point sont contrôlées par les valeurs de f au voisinage de ce point.

Théorème 3. *Si f est une fonction holomorphe dans le disque de centre 0 et de rayon R , pour tout $r < R$ et $n \geq 0$ on a, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,*

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{M(r)}{r^n},$$

où $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Démonstration : D'après le Corollaire 1, la fonction f étant holomorphe dans le disque $D(0, R)$, elle est développable en série entière dans ce disque et on a pour tout r tel que $0 < r < R$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{-n} e^{-int} dt
 \end{aligned}$$

Si on pose $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, on a alors pour $n \geq 0$

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| r^{-n} dt \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

Corollaire 3 (Théorème de Liouville). *Si f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier (on dit alors que f est une fonction entière) et si f est bornée, alors f est constante.*

Démonstration : Puisque f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, il résulte du Corollaire 1 que f est développable en série entière, soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. De plus il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, puisque f est bornée. Les inégalités de Cauchy donnent alors $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout $r > 0$ et tout $n \geq 0$, ce qui implique $a_n = 0$, si $n \geq 1$. $\square$

Corollaire 4 (Théorème de d'Alembert). *Tout polynôme à coefficients complexes non constant possède au moins une racine.*

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré strictement supérieur à 1, supposons que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$. La fonction $\frac{1}{P(z)}$ est alors entière et bornée puisque $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow \infty$, elle est donc constante par le Théorème de Liouville, d'où la contradiction. $\square$

Suites et séries de fonctions holomorphes

Nous allons voir comment les inégalités de Cauchy simplifient l'étude des suites et séries de fonctions dans le cas des fonctions holomorphes d'une variable complexe par rapport au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'une ou plusieurs variables réelles.

Définition 8. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers la fonction f , si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K de U , il existe un entier $N = N(K, \varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Rappels

- 1) Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur U converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f , alors la fonction f est continue sur U .
- 2) Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$ et x_0 un point de U . Si la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si la suite $(df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers $G : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers une application f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $df = G$.

Théorème 4 (de Weierstraß). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f , alors f est holomorphe sur U et les suites $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur tout compact de U vers $f^{(j)}$.

Démonstration : Montrons tout d'abord la seconde assertion du théorème. Soit K un compact de U et $r = \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} \setminus U)$ si $U \neq \mathbb{C}$ et $r = 1$ si $U = \mathbb{C}$, alors pour tout $z \in K$ le disque fermé $\overline{D}(z, r) \subset U$.

Soit $L = \cup_{z \in K} \overline{D(z, r)} = \{\zeta \in U \mid d(z, K) \leq r\}$, L est une partie compacte de U . Les inégalités de Cauchy appliquées à la fonction $f_p - f_n$ impliquent que pour tout $z \in K$

$$|f_p^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z)| \leq \frac{j!}{r^j} \sup_{\zeta \in L} |f_p(\zeta) - f_n(\zeta)|.$$

Puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur L , on en déduit que les suites $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément de Cauchy sur K et par conséquent convergent uniformément sur K . Il suffit alors d'appliquer à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'assertion 2) du rappel au voisinage de chaque point de U , car $df_n = f'_n dz$. $\square$

Théorème 5. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et Σf_n une série de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U . Soit f la somme de cette série, alors

(i) La fonction f est holomorphe sur U et la série $\Sigma f'_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers f' ;

(ii) Si la série Σf_n est normalement convergente sur tout compact de U , il en est de même de la série $\Sigma f'_n$.

Démonstration : L'assertion (i) résulte du Théorème 4 en considérant la suite des sommes partielles de la série Σf_n .

Montrons l'assertion (ii). Soit K un compact de U et L défini comme dans la preuve du Théorème 4. Les inégalités de Cauchy donnent alors $|f'_n(z)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\zeta \in L} |f_n(\zeta)|$ pour tout $z \in K$, soit $\sup_{\zeta \in K} |f'_n(\zeta)| \leq \frac{1}{r} \sup_{\zeta \in L} |f_n(\zeta)|$, ce qui prouve (ii). $\square$

Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, λ la mesure de Lebesgue sur I et U un ouvert de $\mathbb{C}$. On considère une fonction f définie sur $U \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que, pour tout $z \in U$, l'application $t \mapsto f(z, t)$ est λ -intégrable. Soit alors F la fonction définie sur U par

$$F(z) = \int_I f(z, t) d\lambda(t).$$

Théorème 6. On suppose que pour tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe dans U et que, pour tout compact de U , il existe une fonction numérique g_K , λ -intégrable telle que

$$|f(z, t)| \leq g_K(t)$$

pour tout $z \in K$ et tout $t \in I$. Alors la fonction F définie par

$$F(z) = \int_I f(z, t) d\lambda(t)$$

est holomorphe dans U et on peut dériver sous le signe $\int$, c'est-à-dire

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) d\lambda(t)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'existence de la fonction majorante g_K est trivialement vérifiée si f est continue sur $U \times I$ et si I est compact (il suffit alors de prendre pour g_K une fonction constante, la fonction f étant bornée sur le compact $K \times I$).

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t)$ vérifie des majorations analogues à celles vérifiées par $f(z, t)$. Le compact K de U étant fixé, on considère le compact L de U défini par

$$L = \{z \in U \mid d(z, K) \leq r\},$$

où $r = \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} \setminus U)$ si $U \neq \mathbb{C}$ et $r = 1$ si $U = \mathbb{C}$.

Les inégalités de Cauchy donnent

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) \right| \leq n! r^{-n} \sup_{z \in L} |f(z, t)|,$$

soit encore

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) \right| \leq n! r^{-n} g_L(t) \quad (4)$$

pour tout $z \in K$ et tout $t \in I$.

Par ailleurs on a pour tout $z \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[f\left(z + \frac{1}{k}, t\right) - f(z, t) \right],$$

la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$ est donc λ -mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions λ -mesurables. Par récurrence sur n , on montre que $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t)$ est également λ -mesurable. La majoration (4) prouve alors que $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t)$ est λ -intégrable, on peut donc considérer la fonction sur U définie par

$$z \mapsto \int_I \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, t) d\lambda(t).$$

Montrons maintenant que F est holomorphe sur U . Soit $z_0 \in U$ fixé et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ soit contenu dans U . Posons $K = \overline{D}(z_0, r)$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |h| \leq r$ on a

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_I \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h} d\lambda(t).$$

Si h tend vers 0 en restant non nul, la fonction $t \mapsto \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h}$ tend vers la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t)$. D'autre part

$$f(z_0 + h, t) - f(z_0, t) = \int_{[z_0, z_0 + h]} \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, t) d\zeta,$$

d'où

$$\left| \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h} \right| \leq \sup_{z \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq \frac{1}{r} g_L(t),$$

qui est une fonction λ -intégrable indépendante de h , d'après(4). On déduit alors du théorème convergence dominée de Lebesgue que $F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h}$ existe et que $F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) d\lambda(t)$. Une récurrence élémentaire termine la démonstration du théorème. $\square$

Exemple :

On considère la fonction $\Gamma(z)$ définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

pour $\operatorname{Re} z > 0$.

Soient ε et R deux réels strictement positifs, sur l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $0 < \varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R$, la fonction $t^{z-1} e^{-t}$ possède une fonction majorante intégrable indépendante de z car

$$\begin{aligned} |t^{z-1} e^{-t}| &\leq t^{\varepsilon-1} e^{-t} \quad \text{si } t \in [0, 1] \\ |t^{z-1} e^{-t}| &\leq t^{R-1} e^{-t} \quad \text{si } t \in]1, \infty[. \end{aligned}$$

La fonction Γ est donc holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ et dans ce demi-plan on a

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \ln t e^{-t} dt.$$

Propriété de la moyenne et principe du maximum

Définition 9. On dit qu'une fonction f définie et continue sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$ possède la propriété de la moyenne si pour tout disque $\overline{D(a, r)}$ fermé inclus dans U , la valeur de f en a est égale à la moyenne de f sur le cercle de centre a et de rayon r , i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Remarque. Si f possède la propriété de la moyenne, il en est de même de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Proposition 5. Si f est holomorphe dans U , f a la propriété de la moyenne dans U .

Démonstration : Si γ désigne le cercle de centre a et de rayon r orienté dans le sens positif, la formule de Cauchy donne

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - a} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

$\square$

Définition 10. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f une fonction continue sur U . On dit que f admet un maximum relatif en a ou par abus de langage que a est un maximum relatif, s'il existe un voisinage V de a tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in V$.

On dira que f vérifie le principe du maximum dans U si pour tout maximum relatif a de f , f est constante au voisinage de a .

Théorème 7. Une fonction f définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, qui possède la propriété de la moyenne, vérifie le principe du maximum.

Démonstration : Soit a un maximum relatif de f et $\rho > 0$ tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in D(a, \rho)$.

Si $f(a) = 0$, le théorème est évident, en effet $f \equiv 0$ dans $D(a, \rho)$.

Si $f(a) \neq 0$, quitte à multiplier f par une constante convenable ($\frac{\overline{f(a)}}{|f(a)|}$ par exemple) on peut supposer que $f(a) = |f(a)| > 0$. Pour tout $r < \rho$, la propriété de la moyenne s'écrit

$$|f(a)| = f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - f(a + re^{it})] dt = 0.$$

En particulier en prenant la partie réelle

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + re^{it})] dt = 0. \quad (5)$$

Mais puisque a est un maximum relatif de f , la fonction continue $|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + re^{it})$ est positive ou nulle. La nullité de (5) implique pour tout t et tout $r < \rho$ que

$$|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + re^{it}) = 0.$$

Or $|f(a)| \geq |f(a + re^{it})|$ donc $\operatorname{Im} f(a + re^{it}) = 0$ et

$$f(a) = \operatorname{Re} f(a + re^{it}) = f(a + re^{it})$$

pour tout t et tout $r < \rho$. □

Corollaire 5. Si U est un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur U , f n'admet pas de maximum relatif dans U .

Démonstration : Raisonnons par l'absurde, supposons que f possède un maximum relatif en $a \in U$. Puisque f est holomorphe, elle satisfait la propriété de la moyenne et d'après le Théorème 7 elle est donc constante au voisinage de a . L'analyticité de f et la connexité de U impliquent alors que f est constante, ce qui contredit l'hypothèse. □

Corollaire 6. *Si U est un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur U telle que $|f|$ admet un minimum local dans U , alors ce minimum est nécessairement nul. En particulier f s'annule au moins une fois dans U .*

Démonstration : Soit $z_0 \in U$ un minimum local pour $|f|$. Supposons que $|f(z_0)| \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est définie et holomorphe au voisinage de z_0 et possède un maximum local en z_0 , donc f est constante d'après le principe du maximum (Corollaire 5, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Nous donnons maintenant une formulation plus globale du principe du maximum.

Proposition 6. *Soit D un domaine (i.e. ouvert connexe) borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D . Soit $M = \sup_{z \in \overline{D} \setminus D} |f(z)|$, alors $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D$. De plus, s'il existe $a \in D$ tel que $|f(a)| = M$, alors f est constante sur D .*

Démonstration : Soit $M' = \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)|$, comme f est continue sur $\overline{D}$, qui est compact, cette borne supérieure est atteinte en au moins un point de $\overline{D}$. Si elle est atteinte en un point $a \in D$, alors f est constante au voisinage de a et donc constante sur l'ouvert connexe D par prolongement analytique. Sinon $M' = M$ car la borne supérieure est alors atteinte sur $\overline{D} \setminus D$ et pour tout $z \in D$ on a $|f(z)| \leq M$. $\square$

Théorème 8 (Lemme de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $D(0, 1)$ de $\mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ |f(z)| &\leq 1 \quad \text{pour tout } z \in D(0, 1). \end{aligned}$$

Alors pour tout $z \in D(0, 1)$, on a

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

De plus, ces inégalités sont strictes sauf s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

Démonstration : Dans $D(0, 1)$ la fonction f coïncide avec sa série de Taylor en 0, i.e.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \dots$$

Or par hypothèse $a_0 = 0$ car $f(0) = 0$ et par conséquent la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(z) = \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ g(0) = f'(0) \end{cases}$$

est holomorphe sur le disque $D(0, 1)$.

Puisque $|f(z)| < 1$, on a $|g(z)| < \frac{1}{r}$ si $|z| = r < 1$. Cette inégalité est encore valable pour $|z| \leq r$, d'après la variante du principe du maximum, par conséquent en faisant tendre r vers 1 on a $|g(z)| < 1$, soit $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

De plus s'il existe $z_0 \in D(0, 1)$ tel que $|g(z_0)| = 1$ alors, d'après la Proposition 6, la fonction g est constante égale à λ , où $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0, 1)$. $\square$

Terminons cette section en prouvant le théorème de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes à l'aide du principe du maximum.

Théorème 9 (de l'application ouverte). *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si f de U dans $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non constante, alors f est une application ouverte, i.e. pour tout ouvert $V \subset U$, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Soient V un ouvert de U et $a \in V$, nous devons prouver que $f(V)$ est un voisinage de $b = f(a)$.

Comme f n'est pas constante, on peut trouver d'après le principe des zéros isolés un disque ouvert D centré en a tel que $\overline{D} \subset V$ et $f(z) - b$ ne s'annule pas sur $D \setminus \{a\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - b| \geq \varepsilon$ sur ∂D (un tel ε existe par compacité de ∂D). On va montrer que $D(b, \varepsilon/2) \subset f(\overline{D}) \subset f(V)$.

Fixons $w \in D(b, \varepsilon/2)$ et considérons la fonction f_w de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_w(z) = f(z) - w$. La fonction f_w est continue donc la fonction $|f_w|$ atteint sa borne inférieure sur le compact $\overline{D}$. Par ailleurs

$$|f_w(z)| \geq ||f(z) - b| - |b - w|| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } z \in \partial D$$

et

$$|f_w(a)| = |b - w| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que la borne inférieure de f_w est atteinte en point de D . Comme f_w n'est pas constante dans D , puisque f ne l'est pas, la fonction $f_w(z) = f(z) - w$ s'annule au moins une fois dans D d'après le Corollaire 6, ce qui signifie que $w \in f(D)$. $\square$

1.4 Théorie de Cauchy pour les domaines étoilés

Existence de primitives

L'objet de cette section est de donner des conditions sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui permettent d'assurer l'existence de primitives pour les fonctions continues définies sur cet ouvert.

Définition 11. *Soit f une fonction continue d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes. On appelle primitive de f toute fonction F définie sur U telle que $F' = f$.*

Théorème 10. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$. Pour que f admette une primitive dans U il faut et il suffit que pour tout chemin fermé γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U on ait

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0.$$

Démonstration : La nécessité de la condition a été prouvée dans le premier exemple de la section 1.2.

Supposons la condition satisfaite, nous devons construire une primitive F de f sur chaque composante connexe de U . Sans perte de généralité nous pouvons supposer que U est connexe. Pour tout couple de points z_0, z de U , il existe donc un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ contenu dans U joignant z_0 à z . Si $([a, b], \gamma)$ est un tel chemin, on définit le chemin $([a, b], -\gamma)$ par $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ et on a

$$\int_{-\gamma} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz.$$

Montrons que $\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$ ne dépend pas du choix du chemin γ contenu dans U joignant z_0 à z . Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans U joignant z_0 à z . Notons γ le chemin obtenu en juxtaposant le chemin γ_1 et le chemin $-\gamma_2$, c'est un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U (figure 5).

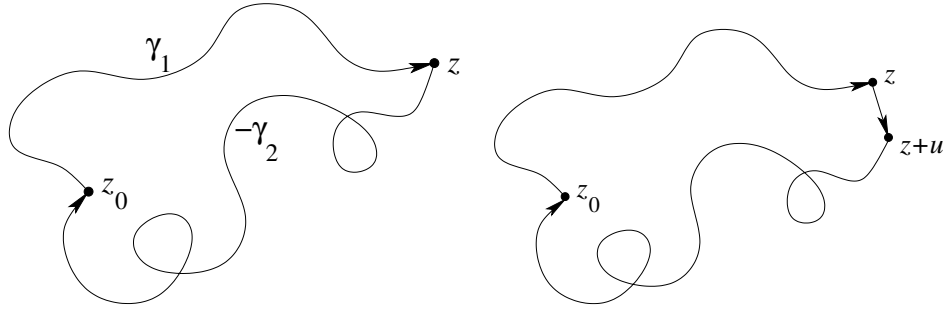


FIGURE 5 – Chemins fermés de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, concaténations de chemins de mêmes extrémités.

Par hypothèse on a donc

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz - \int_{\gamma_2} f(z) \, dz = 0,$$

soit

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz.$$

Fixons $z_0 \in U$, on peut alors définir pour $z \in U$

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) \, dw,$$

où $\int_{z_0}^z$ signifie $\int_\gamma$, γ étant un chemin quelconque contenu dans U joignant z_0 à z .

Il reste à prouver que F est une primitive de f sur U . Pour $u \in \mathbb{C}$ assez petit pour que le segment Γ_u d'extrémités z et $z + u$ soit contenu dans U on a

$$\begin{aligned} F(z + u) - F(z) &= \int_{z_0}^{z+u} f(w) \, dw - \int_{z_0}^z f(w) \, dw = \int_{\Gamma_u} f(w) \, dw \\ &= uf(z) + \int_{\Gamma_u} (f(w) - f(z)) \, dw. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est majorée en module par $|u|\epsilon(u)$ avec $\epsilon(u) = \sup_{\Gamma_u} |f(w) - f(z)|$ et, la fonction f étant continue, $\epsilon(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0, par conséquent

$$\frac{F(z + u) - F(z)}{u} - f(z) = \epsilon(u) \rightarrow_{u \rightarrow 0} 0,$$

c'est-à-dire $F'(z) = f(z)$. □

Remarque. On a vu dans la section 1.2 que

$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi,$$

la fonction $\frac{1}{z}$ n'admet donc pas de primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Définition 12. Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dit étoilé s'il existe un point $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$ le segment joignant z_0 à z est contenu dans U , c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$ le point $w = z_0 + t(z - z_0)$ appartient à U .

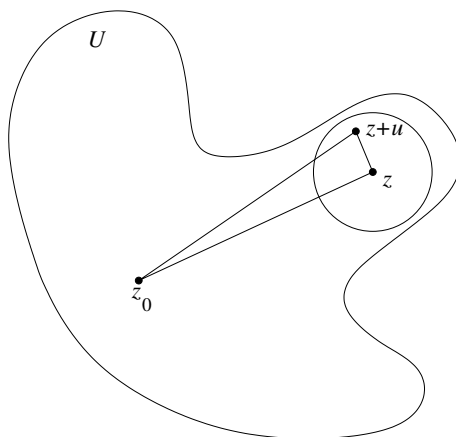


FIGURE 6 – Ouvert étoilé.

Exemple. Un ouvert convexe U est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Si Δ est un triangle fermé de $\mathbb{C}$, on désigne par $\partial\Delta$ le chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux constitué du bord du triangle Δ parcouru une fois dans le sens direct.

Théorème 11. Soit f une fonction continue sur un ouvert étoilé U de $\mathbb{C}$ telle que

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$$

pour tout triangle Δ contenu dans U , alors f admet une primitive dans U .

Démonstration : Soit z_0 un point de U par rapport auquel U est étoilé, alors pour tout $z \in U$ le segment $[z_0, z]$ joignant z_0 à z est contenu dans U . On pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) \, dw.$$

Puisque U est un ouvert de $\mathbb{C}$, il existe $r > 0$ tel que le disque $D(z, r)$ soit contenu dans U et par conséquent si $|u| < r$ le segment $[z, z + u]$ est contenu dans U . L'ouvert U étant étoilé par rapport à z_0 , le triangle Δ de sommets z_0 , z et $z + u$ est contenu dans U . Puisque $\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$, il résulte de la définition de F que

$$F(z + u) - F(z) = \int_{[z, z+u]} f(w) \, dw$$

et on conclut comme dans la preuve du Théorème 10. □

Résumé. Soit f est une fonction continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 \text{ pour tout} & & \\ \text{chemin fermé } \gamma \text{ de } U & & \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0 & \Rightarrow & f \text{ admet une} \\ \text{pour tout triangle } \Delta \subset U & & \text{primitive dans } U \\ & U \text{ étoilé} & \end{array}$$

Théorèmes de Cauchy

Nous développons ici la théorie de Cauchy pour les domaines convexes ou étoilés.

Théorème 12. Soit f une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Pour tout triangle Δ contenu dans U on a

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0.$$

Démonstration : Nous utilisons la méthode de Goursat. Soient a, b, c les sommets du triangle Δ et a', b', c' les milieux des segments $[b, c]$, $[a, c]$ et $[a, b]$. On considère les quatre nouveaux triangles Δ^j , $1 \leq j \leq 4$, associés aux triplets (a, c', b') , (b, a', c') , (c, b', a') et (a', b', c') .

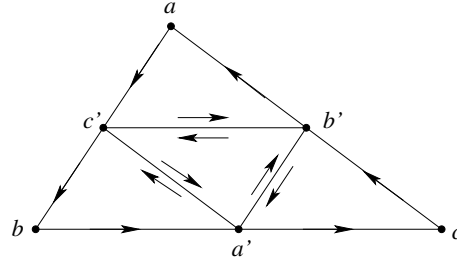


FIGURE 7 – Méthode de Goursat.

Posons $J = \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z) \, dz$. La valeur absolue d'une au moins des quatre intégrales $\int_{\partial\Delta_j} f(z) \, dz$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{4}|J|$. Soit Δ^1 le triangle correspondant à une telle intégrale. En appliquant à Δ_1 le raisonnement fait pour Δ , on construit un triangle Δ_2 tel que

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z) \, dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) \, dz \right|.$$

On construit ainsi une suite de triangles emboîtés fermés

$$\Delta_0 = \Delta \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$$

tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\Delta_{n-1}} f(z) \, dz \right|.$$

On en déduit

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |J|. \quad (6)$$

De plus par construction $l(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} l(\partial\Delta)$.

La famille $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}$. En effet $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \neq \emptyset$ car sinon il existerait une sous famille finie d'intersection vide, ce qui contredirait la décroissance de la famille ; elle est réduite à un point car le diamètre des Δ_n tend vers 0.

Comme $z_0 \in \Delta \subset U$, f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 par hypothèse. Par conséquent $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $r > 0$ tel que pour $|z - z_0| \leq r$ on ait

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Prenons n assez grand pour que $\Delta_n \subset D(z_0, r)$. Puisque la fonction polynomiale $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ admet des primitives dans $\mathbb{C}$, son intégrale sur tout chemin fermé est nulle donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) \, dz \right| \\ &\leq \varepsilon \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \, l(\partial\Delta_n) \\ &\leq \varepsilon (l(\partial\Delta_n))^2 \leq \frac{\varepsilon}{4^n} (l(\partial\Delta))^2. \end{aligned}$$

On déduit alors de 6 que

$$\frac{1}{4^n} |J| \leq \frac{\varepsilon}{4^n} (l(\partial\Delta))^2,$$

soit $|J| \leq \varepsilon (l(\partial\Delta))^2$; ε étant arbitraire on a $J = 0$. $\square$

Remarque. Le résultat du théorème précédent reste vrai si on suppose que f est continue dans U et $\mathbb{C}$ -dérivable dans U privé d'un point α .

Démonstration : [de la remarque] Il n'y a à traiter que le cas où $\alpha \in \Delta$, l'autre cas résultant directement du Théorème 12.

Si α est un sommet de Δ , par exemple $\alpha = a$. D'après le Théorème 12, si $b' \in [a, b]$ et $c' \in [a, c]$,

$$\int_{(abc)} f(z) dz = \int_{(ab'c')} f(z) dz$$

car les intégrales sur les autres triangles sont nulles, α n'appartient pas à ces triangles. Si $b' \rightarrow a$ et $c' \rightarrow a$, l'intégrale $\int_{(ab'c')} f(z) dz \rightarrow 0$ à cause de la continuité de f .

Si α est sur un côté de Δ , on se ramène au cas précédent en décomposant Δ en deux triangles en joignant α au sommet opposé. De même si α est à l'intérieur de Δ , on décompose Δ en trois triangles en joignant α à chacun des sommets de Δ (figure 8). $\square$

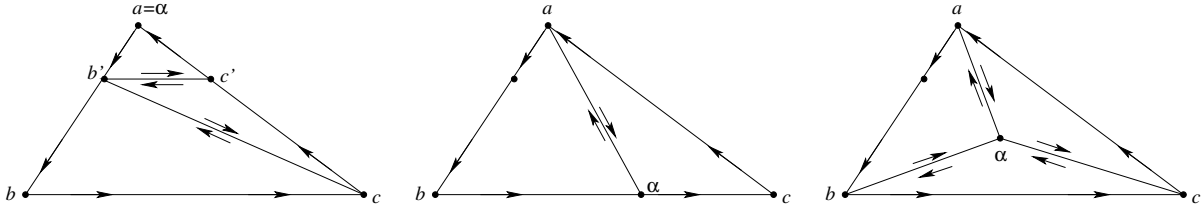


FIGURE 8 – Découpage de triangles.

Cette extension nous sera utile ultérieurement. Mais en fait elle n'est qu'apparente car on verra que si f est continue sur U et $\mathbb{C}$ -dérivable dans U privé d'un point elle est $\mathbb{C}$ -dérivable dans U .

Corollaire 7. Soient U un ouvert convexe ou étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable dans U . Alors f admet une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration : C'est une conséquence directe des Théorèmes 12, 11 et 10. $\square$

Théorème 13. Soit f une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable dans un ouvert U convexe ou étoilé de $\mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans U , d'image Γ . Pour tout $z \in U \setminus \Gamma$ on a

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (7)$$

Démonstration : Soit z un point de U , la fonction g définie dans U par

$$\begin{cases} g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ g(z) = f'(z) \end{cases}$$

est continue dans U et $\mathbb{C}$ -dérivable dans $U \setminus \{z\}$. Puisque U est étoilé, il résulte de la remarque suivant le théorème 12 et du Théorème 11 que g admet une primitive dans U et par conséquent que son intégrale sur tout chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans U est nulle. On a donc, si $z \notin \Gamma$,

$$\int_{\gamma} g(w) \, dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, dw = 0,$$

d'où

$$f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} \, dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

et le résultat par définition de l'indice d'un chemin par rapport à un point. $\square$

Corollaire 8. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, toute fonction $\mathbb{C}$ -dérivable dans U est analytique dans U et en particulier indéfiniment dérivable.*

Démonstration : Pour tout $z \in U$ il suffit d'appliquer la formule de Cauchy en prenant comme chemin γ le cercle de centre z et de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\overline{D}(z, r) \subset U$ et de répéter la démonstration du Corollaire 1. $\square$

Remarque. Le Corollaire 8 implique en particulier l'équivalence entre la $\mathbb{C}$ -dérivabilité et l'holomorphie. L'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^1$ que nous avons faite dans la définition des fonctions holomorphes au paragraphe « Fonctions holomorphes » est donc superflue. Elle nous a permis d'obtenir très rapidement les principales propriétés des fonctions holomorphes en évitant la théorie des primitives.

Corollaire 9 (Théorème de Morera). *Soit f une fonction continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *La fonction f est $\mathbb{C}$ -dérivable dans U*
- 2) *La fonction f est holomorphe dans U*
- 3) *La fonction f est analytique dans U*
- 4) *La fonction f admet localement une primitive dans U*
- 5) *Pour tout triangle Δ contenu dans U , on a $\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$.*

Démonstration : Nous venons de prouver que 1) implique 5) et que 1), 2) et 3) sont équivalentes. Il résulte du paragraphe « Existence de primitives » que 4) est équivalent à 5). Il reste donc à prouver que 4) implique 1). Soient z_0 un point de U et F une primitive de f sur un voisinage V_{z_0} de z_0 . La fonction F est $\mathbb{C}$ -dérivable sur V_{z_0} et $F' = f$, mais d'après le Corollaire 8 F est indéfiniment dérivable et en particulier f est $\mathbb{C}$ -dérivable sur V_{z_0} . Ceci étant valable pour tout $z_0 \in U$, f est $\mathbb{C}$ -dérivable sur U . $\square$

Résumé. Soit f est une fonction continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccc}
\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 \text{ pour tout} & \Leftrightarrow & f \text{ admet une} \\
\text{chemin fermé } \gamma \text{ de } U & & \text{primitive dans } U \\
\\
U \text{ étoilé} \quad \Uparrow \quad \Downarrow & & \Downarrow \\
f \text{ holomorphe dans } U & \Leftrightarrow & f \text{ admet localement} \\
& & \text{une primitive dans } U
\end{array}$$

1.5 Fonctions méromorphes

Classification des singularités isolées

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note

$$D^*(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$$

et on dit que $D^*(a, r)$ est le *disque épointé* de centre a et de rayon r .

Définition 13. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. On dit alors que f a une *singularité isolée* en a .

Si la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur U (le prolongement est alors unique par le principe du prolongement analytique), on dit que la singularité de f en a est *illusoire ou éliminable ou encore que a est une fausse singularité ou un point régulier de f* .

Proposition 7. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $U \cap D^*(a, r)$, alors a est un point régulier de f .

Démonstration : On définit la fonction g sur U par

$$\begin{cases} g(z) = (z - a)f(z) & \text{si } z \in U \setminus \{a\} \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

Puisque f est holomorphe sur $U \setminus \{a\}$ et bornée au voisinage de a , la fonction g est holomorphe sur $U \setminus \{a\}$ et continue sur U donc holomorphe sur U . Mais si r est assez petit pour que $D(a, r) \subset U$, g est développable en série entière sur $D(a, r)$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - a)^n \quad \text{pour } |z - a| < r.$$

Mais $\alpha_0 = 0$ puisque $g(a) = 0$ et par suite la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (z - a)^n$ prolonge f au voisinage de a . $\square$

Théorème 14. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. La fonction f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :

- (i) La fonction f a une singularité illusoire en a .
- (ii) Il existe un entier $m \geq 1$, un réel $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$ et une fonction g holomorphe sur le disque $D(a, r)$ vérifiant $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ pour tout $z \in D^*(a, r)$. On dit alors que f a un pôle d'ordre m en a .
- (iii) Pour tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$, l'ensemble $f(D^*(a, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f a une singularité essentielle en a .

Démonstration : Supposons que la propriété (iii) n'est pas satisfaite par f . Il existe alors $b \in \mathbb{C}$, r et ε strictement positifs tels que $D(a, r) \subset U$ et $f(D^*(a, r)) \cap D(b, \varepsilon) = \emptyset$, c'est-à-dire $|f(z) - b| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in D^*(a, r)$. la fonction $z \mapsto \frac{1}{f(z)-b}$ est alors holomorphe dans $D^*(a, r)$ et majorée en module par $\frac{1}{\varepsilon}$. D'après la Proposition 7 elle se prolonge en une fonction h holomorphe sur $D(a, r)$.

Si $h(a) \neq 0$, $f(z) = b + \frac{1}{h(z)}$ a une fausse singularité en a et (i) est vérifiée.

Si $h(a) = 0$, notons m la multiplicité du zéro a de h . Il existe alors une fonction k holomorphe sur $D(a, r)$ vérifiant $k(a) \neq 0$ et telle que

$$h(z) = (z - a)^m k(z) \quad \text{si } z \in D(a, r).$$

On peut supposer r assez petit pour que $k(z) \neq 0$ si $z \in D(a, r)$. Alors $l = \frac{1}{k}$ est une fonction holomorphe dans $D(a, r)$ et $l(a) \neq 0$. On a alors pour $z \in D^*(a, r)$

$$f(z) = b + \frac{l(z)}{(z - a)^m} = \frac{l(z) + b(z - a)^m}{(z - a)^m},$$

c'est la condition (ii) avec $g(z) = l(z) + b(z - a)^m$. □

Fonctions méromorphes

Définition 14. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite méromorphe dans U s'il existe une partie localement finie A de U telle que f soit holomorphe sur $U \setminus A$ et tout point de A soit un pôle de f . On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans U .

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et g et h deux fonctions holomorphes sur U non identiquement nulles. D'après le principe des zéros isolés, l'ensemble A des zéros de h est une partie localement finie de U . Considérons la fonction $f = \frac{g}{h}$, elle est holomorphe sur $U \setminus A$. Soient $a \in A$ et m la multiplicité du zéro a de h . Au voisinage de a on a

$$h(z) = (z - a)^m h_1(z),$$

où h_1 est une fonction holomorphe sur U telle que $h_1(a) \neq 0$.

Si $g(a) \neq 0$, alors a est un pôle de f . Si $g(a) = 0$, on peut écrire $g(z) = (z - a)^p g_1(z)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et g_1 holomorphe sur U telle que $g_1(a) \neq 0$ puisque g n'est pas identiquement nulle. Ainsi $f(z) = (z - a)^{p-m} f_1(z)$, où f_1 est une fonction holomorphe au voisinage de a . Si $p \geq m$, f a une singularité illusoire en a et si $p < m$, a est un pôle d'ordre $m - p$ de f . Dans tous les cas f est une fonction méromorphe sur U .

Remarque. En fait si U est connexe, on peut prouver que toute fonction f méromorphe sur U s'écrit $f = \frac{g}{h}$ avec g et h holomorphes dans U et h non identiquement nulle sur U .

Propriétés. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, la réunion de deux parties localement finies de U est encore une partie localement finie. On en déduit que la somme et le produit de deux fonction méromorphes dans U est encore une fonction méromorphe dans U et que $\mathcal{M}(U)$ a une structure naturelle de $\mathbb{C}$ -algèbre unitaire.

Proposition 8. *Si l'ouvert U est connexe, l'ensemble $\mathcal{M}(U)$ est un corps.*

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, notons A l'ensemble de ses pôles. L'ensemble Z des zéros de f est une partie localement finie de U car U est connexe (sinon f pourrait être identiquement nulle sur une composante connexe de U). Par suite $A \cup Z$ est une partie localement finie de U et $g = \frac{1}{f}$ est holomorphe sur $U \setminus (A \cup Z)$. Il est immédiat que si a est un zéro d'ordre m de f alors a est un pôle d'ordre m de g et si a est un pôle de f , alors a est une singularité illusoire de g , donc $g \in \mathcal{M}(U)$. $\square$

Proposition 9. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U , alors*

(i) *La dérivée f' de f est méromorphe sur U et f et f' ont les mêmes pôles. Si a est un pôle d'ordre m de f , c'est un pôle d'ordre $m + 1$ de f' .*

(ii) *Supposons U connexe et f non identiquement nulle sur U . La fonction $g = \frac{f'}{f}$ est méromorphe sur U et les pôles de g sont simples.*

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la définition des pôles. $\square$

Théorème des résidus

Définition 15. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe sur U et $a \in U$ un pôle d'ordre m de f . Au voisinage de a , f s'écrit $f = g + P$ avec g holomorphe au voisinage de a et*

$$P(z) = \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z - a)^k}.$$

La fonction p est la partie principale de f en a et on dit que a_{-1} est le résidu de f en a , on le note

$$a_{-1} = \text{Res}(f, a).$$

Lemme 2. Si γ est un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U d'image Γ et si $a \in U \setminus \Gamma$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} P(z) \, dz = \text{Ind}_{\gamma}(a) \text{Res}(f, a).$$

Démonstration : Puisque $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^k} = 0$ si $k \neq 1$, car dans ce cas $\frac{1}{(z-a)^k}$ possède une primitive dans U , on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} P(z) \, dz = a_{-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)} = \text{Ind}_{\gamma}(a) \text{Res}(f, a).$$

□

Théorème 15 (des résidus). Soient U un ouvert convexe ou étoilé de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points deux à deux distincts de U et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U dont l'image Γ ne contient aucun des a_k , on a

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k).$$

Démonstration : Soit P_k la partie principale de f en a_k , $1 \leq k \leq n$. La fonction $f - \sum_{k=1}^n P_k$ a une singularité illusoire en chaque a_k , elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U . Le Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe ou étoilé donne alors

$$\int_{\gamma} \left(f(z) - \sum_{k=1}^n P_k(z) \right) \, dz = 0,$$

et en utilisant le Lemme 2 on obtient

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} P_k(z) \, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(a_k) \text{Res}(f, a_k).$$

□

Théorème 16 (de l'indice). Soient U un ouvert convexe ou étoilé de $\mathbb{C}$, g une fonction holomorphe sur U et f une fonction méromorphe sur U . On suppose que f n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \dots, a_m$ dans U (comptés avec leur ordre de multiplicité) et qu'un nombre fini de pôles $b_1, \dots, b_n$ dans U (comptés aussi avec leur ordre de multiplicité). Soit γ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U dont l'image Γ ne contient aucun des a_k et aucun des b_j . Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{k=1}^m g(a_k) \text{Ind}_{\gamma}(a_k) - \sum_{j=1}^n g(b_j) \text{Ind}_{\gamma}(b_j).$$

En particulier

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{k=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(a_k) - \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(b_j).$$

Démonstration : Si $a \in U$ est un zéro d'ordre k de f , il existe alors une fonction h holomorphe au voisinage de a telle que $f(z) = (z - a)^k h(z)$ et $h(a) \neq 0$. On en déduit que

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) \frac{k}{z - a} + g(z) \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Puisque $h(a) \neq 0$, $g \frac{h'}{h}$ est holomorphe au voisinage de a et donc si $g(a) = 0$, la fonction $l = g \frac{f'}{f}$ a une singularité illusoire en a et si $g(a) \neq 0$, la fonction $l = g \frac{f'}{f}$ a un pôle simple en a et la partie principale de l en a est $\frac{kg(a)}{z-a}$, par conséquent $\text{Res}(l, a) = kg(a)$.

De même si $a \in U$ est un pôle d'ordre k de f , il existe alors une fonction h holomorphe au voisinage de a telle que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}$ et $h(a) \neq 0$ et

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = -g(z) \frac{k}{z - a} + g(z) \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

On est alors ramené à l'étude précédente.

Le Théorème des résidus appliqué à la fonction l donne alors le résultat puisque les zéros et les pôles de f ont été comptés avec leur ordre de multiplicité. $\square$

Remarque. On peut se passer de l'hypothèse de finitude sur l'ensemble des zéros et des pôles de f , car on peut s'y ramener facilement. En effet l'image Γ de γ est un compact de U donc il existe $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tels que $\Gamma \subset V = B(0, R) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U) > \varepsilon\}$. Alors $\Gamma \subset V \subset \overline{V} \subset U$ et V étant un ouvert relativement compact de U , $f|_V$ ne possède qu'un nombre fini de zéros et de pôles dans V . De plus si $a \notin V$, on a $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ car a appartient alors à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ car U est étoilé.

Le Théorème de l'indice permet d'obtenir de nouveaux résultats sur les suites de fonctions holomorphes.

Théorème 17. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f .

(i) Si les fonctions f_n ne s'annulent pas sur U alors soit f est identiquement nulle sur U , soit f ne s'annule pas sur U .

(ii) Si les fonctions f_n sont injectives sur U alors soit f est constante sur U , soit f est injective sur U .

Démonstration : On sait d'après la section 1.3 que f est holomorphe sur U .

Montrons (i). Supposons que f n'est pas identiquement nulle et que $a \in U$ est un zéro de f . D'après le principe des zéros isolés il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} \subset U$ et $f(z) \neq 0$, si $0 < |z - a| \leq r$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r parcouru dans le sens direct. D'après le Théorème de l'indice, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k$ et $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les f_n ne s'annulent pas dans U .

Comme $f(z) \neq 0$ si $|z - a| = r$, il existe $A > 0$ tel que $|f(z)| \geq A$ si $|z - a| = r$, soit encore $\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{A}$ si $|z - a| = r$. De plus d'après le Théorème de Weierstraß, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U , en particulier sur le cercle de centre a et de rayon r , image de γ , donc la suite $\left(\frac{f'_n(z)}{f_n(z)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sur le cercle de centre a et de rayon r .

Par conséquent

$$0 < k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = 0,$$

ce qui est impossible.

Prouvons (ii) maintenant. Supposons que f n'est pas constante et qu'il existe des points a et b de U tels que $f(a) = f(b)$. Soient D_a et D_b des disques ouverts de centre respectif a et b , contenus dans U et disjoints. Puisque $f - f(a)$ n'est pas identiquement nulle sur D_a , car f n'est pas constante, il résulte de (i) qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_{\varphi(n)} - f(a)$ ait un zéro dans D_a pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même une nouvelle extraction donne l'existence d'une suite extraite $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_{\psi(n)} - f(b)$ ait un zéro dans D_b pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme D_a et D_b sont disjoints, les fonctions $f_{\psi(n)}$ ne sont donc pas injectives puisque $f(a) = f(b)$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Théorème 18 (de Rouché). Soient U un ouvert convexe ou étoilé de $\mathbb{C}$, f et g des fonctions holomorphes sur U et γ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U d'image Γ . On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) la fonction f (resp. g) n'a qu'un nombre fini $a_1, \dots, a_m$ (resp. $b_1, \dots, b_n$) de zéros dans U comptés avec leur ordre de multiplicité,

(ii) pour tout $z \in \Gamma$, on a $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$,

alors $\sum_{k=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(a_k) = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(b_j)$.

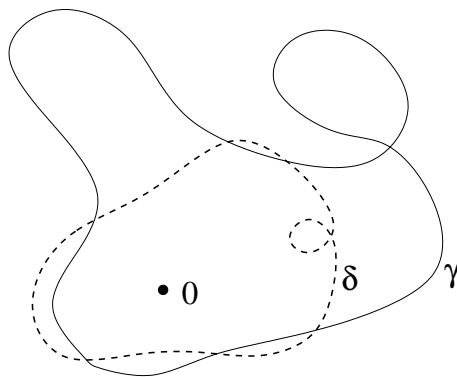
Prouvons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3. Soient $([\alpha, \beta], \gamma)$ et $([\alpha, \beta], \delta)$ deux chemins fermés de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenus dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, vérifiant $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Alors $\text{Ind}_{\gamma}(0) = \text{Ind}_{\delta}(0)$.

Démonstration : Remarquons que la condition $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ implique que 0 n'appartient ni à l'image de γ ni à l'image de δ et donc que les indices $\text{Ind}_{\gamma}(0)$ et $\text{Ind}_{\delta}(0)$ ont un sens.

Posons $\varphi = \frac{\delta}{\gamma}$, alors $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma}$. L'hypothèse implique $|1 - \varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ et donc l'image de φ est contenue dans le disque de centre 1 et de rayon 1. Par conséquent 0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Im } \varphi$ et donc $\text{Ind}_{\varphi}(0) = 0$, d'où

$$2i\pi \text{Ind}_{\varphi}(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = 2i\pi(\text{Ind}_{\delta}(0) - \text{Ind}_{\gamma}(0)) = 0,$$

FIGURE 9 – Deux chemins fermés tels que $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$.

ce qui prouve le lemme. $\square$

Démonstration : [du Théorème de Rouché] L'hypothèse implique que si $z \in \Gamma$, $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$ et que si $t \in [\alpha, \beta]$ on a

$$|f \circ \gamma(t) - g \circ \gamma(t)| < |f \circ \gamma(t)|.$$

En appliquant le lemme 3 on obtient

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \text{Ind}_{g \circ \gamma}(0).$$

Mais d'après le Théorème de l'indice,

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \sum_{k=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(a_k)$$

et

$$\text{Ind}_{g \circ \gamma}(0) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}_{\gamma}(b_j),$$

d'où le résultat. $\square$

Nous en déduisons facilement le corollaire suivant :

Corollaire 10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et r un réel strictement positif tels que $D(a, r) \subset U$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U vérifiant $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout z tel que $|z - a| = r$, alors f et g ont le même nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque de centre a et de rayon r .*

Comme application de ce corollaire nous pouvons donner une nouvelle démonstration du Théorème de d'Alembert.

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m$, un polynôme de degré $m > 0$. On pose $f(z) = a_mz^m$ et $g(z) = P(z) - f(z)$. Puisque g est polynôme de degré $m - 1$, il existe $R > 0$ tel

que pour $|z| > R$ on ait $|g(z)| < |f(z)|$. Par conséquent f et $P = f + g$ ne s'annulent pas pour $|z| \geq R$ et d'après le corollaire 10 f et P ont le même nombre de zéros dans le disque de centre 0 et de rayon R , soit m . Le polynôme P possède donc exactement m racines dans $\mathbb{C}$.

Étude locale des applications holomorphes

Dans cette partie nous allons préciser grâce au Théorème de l'indice les propriétés locales des fonctions holomorphes que nous avons déjà démontrées comme le Théorème de l'application ouverte et le Théorème d'inversion locale.

Théorème 19. *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ et non constante. Soit k l'ordre de la première dérivée non nulle de f en z_0 (k n'est autre que la multiplicité de z_0 comme racine de l'équation $f(z) - f(z_0) = 0$). Il existe alors un voisinage ouvert U de z_0 et un voisinage ouvert $V = f(U)$ de $f(z_0)$ tels que pour tout $w \in V$, distinct de $f(z_0)$, il existe k point distincts $z_1, \dots, z_k$ dans U tels que $f(z_j) = w$ pour tout $j = 1, \dots, k$.*

Démonstration : Par le principe du prolongement analytique, les dérivées de f en z_0 ne peuvent pas être toutes nulles car f n'est pas constante, il existe donc k tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ et $f^{(j)}(z_0) = 0$ si $0 \leq j \leq k-1$.

Comme les zéros de f' et de $f - f(z_0)$ sont isolés, il existe $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans le domaine de définition de f et tel que $f'(z) \neq 0$ et $f(z) \neq f(z_0)$ pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Soit γ le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté dans le sens direct. D'après le Théorème de l'indice on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(f(z_0)) = k.$$

Soit V la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im } f \circ \gamma$ qui contient $f(z_0)$, c'est un voisinage ouvert de $f(z_0)$ dans $\mathbb{C}$. Soit $U = D(z_0, r) \cap f^{-1}(V)$, c'est un ouvert de $\mathbb{C}$ car f est continue et de plus $z_0 \in U$ car $f(z_0) \in V$.

Puisque l'indice $w \mapsto \text{Ind}_{f \circ \gamma}(w)$ est constant sur la composante connexe V de $\mathbb{C} \setminus \text{Im } f \circ \gamma$ qui contient $f(z_0)$, on a $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(w) = k$ pour tout $w \in V$. D'après le Théorème de l'indice, l'équation

$$f(z) = w$$

admet donc k solutions dans $D(z_0, r)$ pour $w \in V$. Ces solutions sont distinctes pour $w \neq f(z_0)$ puisque $f'(z) \neq 0$ dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. On a donc $f(U) = V$ et le Théorème est démontré. $\square$

Corollaire 11 (Théorème de l'application ouverte). *Toute fonction holomorphe non constante définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ est une application ouverte.*

Remarque.

1. Notons que l'hypothèse de connexité de U dans le Théorème de l'application ouverte est nécessaire. En effet si U n'est pas connexe alors $U = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ d'intersection vide, et la fonction f définie par $f \equiv 0$ sur U_1 et $f \equiv 1$ sur U_2 est holomorphe non constante sur U mais elle ne définit pas une application ouverte.
2. Dans la section 1.3 nous avons déduit le Théorème de l'application ouverte du principe du maximum. Remarquons ici que le principe du maximum est une conséquence du Théorème de l'application ouverte. En effet supposons que f soit une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et que $|f|$ possède un maximum relatif en $z_0 \in U$. Considérons un voisinage connexe V de z_0 dans U tel que pour tout $z \in V$ on ait $|f(z)| < |f(z_0)|$. Supposons que f ne soit pas constante sur V , alors, d'après le Théorème de l'application ouverte, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $|f(z_0)|$, il est donc nécessairement contenu dans le disque ouvert ce qui est absurde. Par conséquent f est constante sur V et U étant connexe f est constante sur U par le principe du prolongement analytique.

Corollaire 12. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Si f est injective sur U alors $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Démonstration : Si en un point z_0 de U on a $f'(z_0) = 0$, la fonction f n'est pas injective au voisinage de z_0 d'après le Théorème 19. $\square$

Remarque

1. La réciproque du corollaire 12 est fautive : la fonction exponentielle est telle que $f'(z) = e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, mais elle n'est pas injective puisqu'elle est périodique de période $2i\pi$
2. Le corollaire 12 est faux pour les fonctions d'une variable réelle : la fonction $f(x) = x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$.

Terminons en donnant une démonstration directe (sans passer par le calcul différentiel) du Théorème d'inversion locale pour les fonctions holomorphes.

Théorème 20 (d'inversion locale). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U , f une fonction holomorphe sur U et $w_0 = f(z_0)$. Si $f'(z_0) \neq 0$, il existe des voisinages ouverts V de z_0 et W de w_0 tels que f soit une bijection de U sur V et l'application réciproque $g = f^{-1}$ de W dans V est holomorphe.*

Démonstration : L'existence de V , W et de f^{-1} résulte du Théorème 19 et f' ne s'annule pas sur V . La fonction $g = f^{-1}$ est continue car f est ouverte. Montrons que g est $\mathbb{C}$ -dérivable et donc holomorphe sur W . Soit $w_1 \in V$ fixé, pour tout $w \in W$ on a

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{g(w) - g(w_1)}{f(g(w)) - f(g(w_1))}.$$

La continuité de g en w_1 implique que si w tend vers w_1 alors g est $\mathbb{C}$ -dérivable en w_1 et $g'(w_1) = \frac{1}{f'(g(w_1))}$. $\square$

Grâce au Théorème de l'indice, sous les hypothèses du Théorème 19, on peut expliciter l'application g inverse locale de f à l'aide d'une formule intégrale.

Formule d'inversion locale. Considérons U et V les voisinages de z_0 et de $w_0 = f(z_0)$ du Théorème 19 et supposons que $k = 1$ (i.e. $f'(z_0) \neq 0$). D'après le Théorème de l'indice, la solution $z = g(w)$ de l'équation $f(z) = w$, pour $w \in V$ est donnée par

$$g(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz,$$

où γ est le bord du disque de centre z_0 et de rayon r introduit dans la démonstration du Théorème 19.

Plus généralement, pour toute fonction h holomorphe sur U , on a

$$h(g(w)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h(z)f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

La formule intégrale donnant $g(w)$ permet également de prouver directement que $w \mapsto g(w)$ est holomorphe sur V .

1.6 Théorie de Cauchy globale

Théorème de Cauchy global

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$ d'image respectives $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ et $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$. On définit la *chaîne* $\tilde{\gamma}$ comme la somme formelle $\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ et on pose pour toute fonction f continue sur Γ

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Si chacun des γ_i est fermé, on dit que $\tilde{\gamma}$ est un *cycle*.

Notons qu'une chaîne peut être représentée de plusieurs manières comme somme de chemins :

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$$

signifie que

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i} f(z) dz$$

si f est continue sur $(\cup_{i=1}^n \Gamma_i) \cup (\cup_{i=1}^n \Delta_i)$. En particulier un cycle peut être représenté par une somme de chemins qui ne sont pas tous fermés, mais il possède au moins une représentation en somme de chemins fermés.

Si $\tilde{\gamma}$ est un cycle et si $\alpha \notin \Gamma$, on définit l'indice de $\tilde{\gamma}$ par rapport à α par

$$\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z - \alpha}.$$

Si chacun des chemins γ_i qui apparaissent dans une décomposition de $\tilde{\gamma}$ est fermé alors $\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma_i}(\alpha)$.

Si dans la définition de $\tilde{\gamma}$ on remplace chacun des chemins γ_i par le chemin opposé on obtient une nouvelle chaîne notée $-\tilde{\gamma}$ et on a $\int_{-\tilde{\gamma}} f(z) dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$ pour toute fonction f continue sur Γ et en particulier $\text{Ind}_{-\tilde{\gamma}}(\alpha) = -\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha)$.

De plus si $\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ et $\tilde{\delta} = \delta_1 + \dots + \delta_n$ sont deux chaînes on définit de manière naturelle $\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}$ par

$$\tilde{\gamma} + \tilde{\delta} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \delta_1 + \dots + \delta_n.$$

On a alors

$$\int_{\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz + \int_{\tilde{\delta}} f(z) dz.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le Théorème de Cauchy sous sa forme globale :

Théorème 21 (de Cauchy global). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Si $\tilde{\gamma}$ est un cycle d'image Γ dans U qui satisfait*

$$\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C} \setminus U,$$

alors

- (i) $f(z) \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} dw$ pour tout $z \in U \setminus \Gamma$;
- (ii) $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0$;
- (iii) Si $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$ sont deux cycles de U tels que $\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = \text{Ind}_{\tilde{\delta}}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus U$, on a $\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\tilde{\delta}} f(z) dz$.

Remarque. Notons que contrairement à la version du Théorème et de la formule de Cauchy énoncés dans la section 1.4 il n'y a pas d'hypothèse topologique sur l'ouvert U dans le Théorème 21, elle est remplacée par une hypothèse sur le cycle $\tilde{\gamma}$ sur lequel se font les intégrations. Par exemple dans le cas où $U = \mathbb{C}^*$, qui ne satisfait pas les conditions topologiques de la section 1.4, le cycle $\tilde{\gamma} = \mathcal{C}(0, R)$ définit par le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$ parcouru une fois dans le sens direct ne satisfait pas la condition du théorème pour $\alpha = 0$, mais le cycle $\tilde{\gamma} = \mathcal{C}(0, R) - \mathcal{C}(0, R/2)$ satisfait la condition du Théorème 21.

Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration. Nous n'utiliserons pas la théorie des intégrales dépendant d'un paramètre holomorphe étudiée dans la section 1.3 et qui s'appuyait sur les inégalités de Cauchy, nous démontrerons les résultats liés à cette théorie si nécessaire en utilisant le théorème de Morera.

Démonstration : La fonction g définie sur $U \times U$ par

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

est continue sur $U \times U$. On peut donc définir une fonction h continue sur U en posant

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} g(z, w) dw.$$

On veut prouver que si $z \in U \setminus \Gamma$, (i) est satisfait, c'est-à-dire $h(z) = 0$. Montrons que h est holomorphe sur U . Soit Δ un triangle contenu dans U , alors en appliquant le théorème de Fubini puisque g est continue donc intégrable sur tout compact de $U \times U$ on obtient

$$\int_{\partial\Delta} h(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \left(\int_{\tilde{\gamma}} g(z, w) dw \right) dz.$$

Or pour tout $w \in U$ la fonction $z \mapsto g(z, w)$ est holomorphe sur U car continue et holomorphe sauf en un point, donc $\int_{\partial\Delta} g(z, w) dz = 0$ et par conséquent $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$. La fonction h est donc holomorphe sur U par le Théorème de Morera.

De plus $h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(z)$.

Notons $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(z) = 0\}$. On pose

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour $z \in U_1$. Par la même méthode que ci-dessus on peut prouver que h_1 est holomorphe sur U_1 puisque $(z, w) \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ est continue sur $U_1 \times \Gamma$ et $z \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ est holomorphe sur U_1 .

Comme U_1 contient $\mathbb{C} \setminus U$, on définit une fonction φ holomorphe sur $\mathbb{C}$ en posant

$$\begin{cases} \varphi(z) = h(z) & \text{si } z \in U \\ \varphi(z) = h_1(z) & \text{si } z \in U_1 \end{cases}$$

puisque $h(z) = h_1(z)$ si $z \in U \cap U_1$.

D'après les propriétés de l'indice, U_1 contient la composante connexe non bornée du complémentaire de Γ , donc $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_1(z) = 0$ et en appliquant le Théorème de Liouville à φ on obtient $\varphi(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'où $h \equiv 0$ et (i) est démontré.

On déduit (ii) de (i) de la manière suivante : choisissons $a \in U \setminus \Gamma$ et posons $F(z) = (z - a)f(z)$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{F(w)}{w-z} dw = F(a) \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(a) = 0.$$

Finalement pour prouver (iii), il suffit d'appliquer (ii) au cycle $\tilde{\gamma} - \tilde{\delta}$. $\square$

Exemple.

1- Soit U un ouvert convexe ou étoilé, γ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U et $\alpha \notin U$. La fonction $f\varphi(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ est holomorphe dans U et d'après le Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe ou étoilé $\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(z) = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi(z) dz = 0$. L'hypothèse du Théorème 21 est donc satisfaite pour tout cycle lorsque U est convexe ou étoilé.

2- Un compact K de U d'intérieur non vide et tel que $K = \overline{\overset{\circ}{K}}$ est un compact à bord si sa frontière est formée par les images $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ d'un nombre fini de chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, chaque $([a_i, b_i], \gamma_i)$ étant un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sans point stationnaire (i.e. pour tout $t \in]a_i, b_i[$ en lequel γ_i est dérivable $\gamma'_i(t) \neq 0$) et sans point double (i.e. si $t', t'' \in [a_i, b_i]$ vérifie $t' \neq t''$ alors $\gamma_i(t') \neq \gamma_i(t'')$) et les images des Γ_i étant deux à deux disjointes. L'orientation des chemins $\gamma_i, i = 1, \dots, k$, de telle sorte que lorsque l'on se déplace sur Γ_i dans le sens de l'orientation le compact K se situe à gauche de Γ_i .

Le bord orienté $\tilde{\gamma}$ d'un compact à bord K est un cycle tel que $\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = 0$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus K$ et $\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in \overset{\circ}{K}$. Si $D_0, D_1, \dots, D_k$ désignent les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$, le cycle $\tilde{\gamma}$ s'écrit $\tilde{\gamma} = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$, où les chemins $-\gamma_j$ désignent respectivement les bords des composantes connexes D_j . On suppose que D_0 désigne la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Si $\alpha \in D_0$, $\text{Ind}_{\gamma_j}(\alpha) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Si $\alpha \in D_j, j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) &= 1 \\ \text{Ind}_{\gamma_j}(\alpha) &= -1 \\ \text{Ind}_{\gamma_l}(\alpha) &= 0 \quad \text{si } l \neq j \end{aligned}$$

car alors α est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_j$.

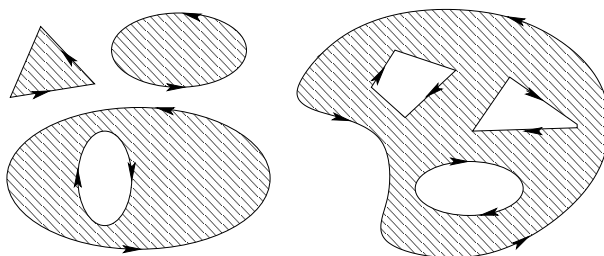


FIGURE 10 – Compacts à bord.

Séries de Laurent

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{Z}$ une suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$.

Le série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ converge dans un disque de rayon $\frac{1}{R}$, $R \geq 0$. La série

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}$$

converge donc absolument pour $|z| > R$ et même normalement sur tout compact de cet ensemble. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge dans un disque de rayon $R' \geq 0$.

Si $R < R'$, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge absolument dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < R'\}$ et normalement sur tout compact de cette couronne. Cette série de fonction s'appelle la *série de Laurent* associée à la suite $(a_n)_n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 22. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z - a| < R'\}$. Il existe une unique série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$ dont la somme est égale à f dans cette couronne. De plus si γ_r est le cercle de centre a et de rayon r orienté dans le sens direct, $R < r < R'$, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw.$$

Démonstration : Soient $a \in \mathbb{C}$, R et R' des réels tels que $0 \leq R < R' \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z - a| < R'\}$. Si $R < R_1 < R'_1 < R'$, on considère la couronne compacte $K = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - a| < R'_1\}$, c'est un compact à bord dont le cycle constitué par son bord est noté $\tilde{\gamma}$. Pour tout $z \in \overset{\circ}{K}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

d'après le Théorème 21. Puisque $\tilde{\gamma} = \gamma'_1 - \gamma_1$, où γ_1 est le chemin fermé défini par le cercle de centre a et de rayon R_1 orienté dans le sens direct et γ'_1 le chemin fermé défini par le cercle de centre a et de rayon R'_1 orienté dans le sens direct, on a en fait

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

En reprenant la démonstration du Théorème d'analyticité des fonctions holomorphes, on montre que la première intégrale a pour valeur $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw.$$

Pour la seconde intégrale, on remarque que si $w \in \text{Im } \gamma_1$, on a $|w - a| < |z - a|$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{w - a}{z - a} \right)^m = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w - a)^{n-1}}{(z - a)^n}.$$

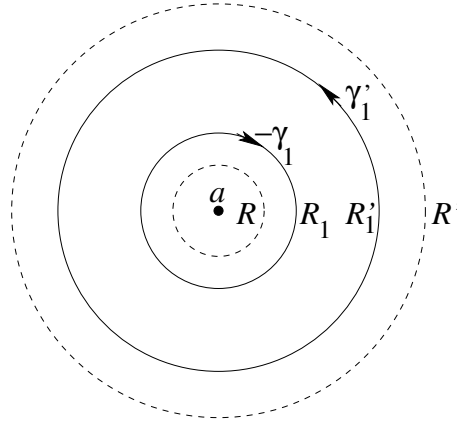


FIGURE 11 – Couronne ouverte et couronne compacte.

Puisque la série de fonctions de terme général $\frac{f(w)(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$ converge normalement sur $\text{Im } \gamma_1$, on peut intégrer terme à terme et on trouve que

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

avec $b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^{n-1} dw$.

Pour calculer a_n et b_n on peut remplacer les chemins γ_1 et γ_1' par n'importe quel cercle γ_r de centre a et de rayon r , $R < r < R'$, orienté dans le sens direct car si α n'est pas contenu dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-a| < R'\}$

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1'}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_r}(\alpha)$$

et on peut appliquer le (iii) du théorème 21 aux fonctions $\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ et $f(w)(w-a)^{n-1}$. On en déduit que le développement obtenu est valable dans toute la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-a| < R'\}$ et en posant $a_{-k} = b_k$ on obtient $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ pour tout z tel que $R < |z-a| < R'$ avec $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Terminons en montrant l'unicité du développement de Laurent de f . Soient ρ et ρ' deux nombres réels tels que $R < \rho < \rho' < R'$, supposons que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_n (z-a)^n$ pour tout z tel que $\rho < |z-a| < \rho'$. Puisque les séries de Laurent convergent normalement sur tout compact de leur couronne de définition, on peut échanger l'intégrale et la sommation lors de l'intégration de la fonction $\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$ sur le cercle γ_r de centre a et de rayon r , $\rho < r < \rho'$. On obtient alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw = \tilde{a}_k,$$

d'où l'unicité du développement de Laurent de f . □

Corollaire 13. Soient $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ le développement de Laurent d'une fonction f holomorphe dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-a| < R'\}$ et, pour $r \in]R, R'[, M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $r \in]R, R'[,$ on a alors

$$|a_n|r^n \leq M(r).$$

Démonstration : Cela se déduit immédiatement de la formule de représentation intégrale des a_n . $\square$

Singularités isolées et développement de Laurent

Soient $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et f une fonction holomorphe dans le disque épointé $D^*(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$. Elle possède un développement de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ si $0 < |z-a| < r$. Alors

(i) Si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$, a est une singularité illusoire pour f et f se prolonge holomorphiquement au disque de centre a et de rayon r par la série $\sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$.

(ii) S'il existe $p > 0$ tel que $a_{-p} \neq 0$ et $a_n = 0$ si $n < -p$, a est un pôle d'ordre p de f et la partie principale de f en a est $\sum_{n=1}^p a_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}$.

(iii) S'il existe une infinité d'indices n strictement négatifs tels que $a_n \neq 0$, la fonction f a une singularité essentielle en a . On dit encore que $\sum_{n < 0} a_n(z-a)^n$ est la partie principale de f en a .

Ces trois cas représentant l'ensemble des possibilités et s'excluant mutuellement on a ainsi une caractérisation des singularités isolées d'une fonction holomorphe en fonction de son développement de Laurent.

De plus le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f sur $D^*(a, r)$ s'appelle le *résidu* de f en a .

Théorème 23. Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ sauf en des points singuliers isolés et K un compact à bord contenu dans U . On suppose que le bord de K ne contient aucun point singulier de f . Alors les points singuliers de f contenus dans K sont en nombre fini et on a

$$\int_{\partial K} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_j \text{Res}(f, z_j),$$

où ∂K désigne le cycle défini par le bord orienté de K et où les z_j sont les points singuliers de f contenus dans K .

Démonstration : L'ensemble K étant compact, si les singularités de f contenues dans K étaient en nombre infini elles auraient un point d'accumulation qui ne pourrait pas être isolé.

Soient $z_1, \dots, z_k$ les points singuliers de f contenus dans K . Pour $j = 1, \dots, k$, $\bar{D}_j$ un disque fermé de centre z_j et de rayon r_j assez petit pour que $\bar{D}_j$ soit contenu dans $\overset{\circ}{K}$ et $\bar{D}_j \cap \bar{D}_l = \emptyset$ si $j \neq l$. Soit γ_j le cercle orienté dans le sens direct bord de $\bar{D}_j$.

Posons $K' = K \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$, K' est un compact à bord dont le bord orienté est représenté par le cycle $\partial K' = \partial K - \gamma_1 - \dots - \gamma_k$.

On peut appliquer le (ii) du Théorème 21 à la fonction f et au cycle $\partial K'$. On obtient

$$\int_{\partial K'} f(z) \, dz = \int_{\partial K} f(z) \, dz - \int_{\gamma_1} f(z) \, dz - \dots - \int_{\gamma_k} f(z) \, dz = 0,$$

d'où

$$\int_{\partial K} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

en calculant $\int_{\gamma_j} f(z) \, dz$ à l'aide du développement de Laurent de f au voisinage de $\overline{D_j} \setminus \{z_j\}$. $\square$

Le théorème de l'indice pour les fonctions méromorphes et le théorème de Rouché s'étendent également aux compacts à bord. On compte alors les zéros et les pôles contenu à l'intérieur du compact.

1.7 Topologie de $\mathcal{H}(U)$ et représentation conforme

Rappels sur les espaces vectoriels topologiques

L'objet de cette section est de rappeler les propriétés basiques des espaces vectoriels topologiques, tout particulièrement lorsque la topologie est définie par une famille de semi-normes.

Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dira qu'une partie A de E est *absorbante* si pour tout $x \in E$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda x \in A$ lorsque $\lambda \in K$ et $|\lambda| < \alpha$ et on dira qu'elle est *équilibrée* si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| < 1$. Remarquons que si une partie A de E est absorbante alors $0 \in A$.

Définition 16. *Un espace topologique E muni d'une structure algébrique d'espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel topologique, en abrégé evt, si les lois définissant la structure d'espace vectoriel sont continues, plus précisément si la loi de composition interne $+$: $E \times E \rightarrow E$ est continue et si la loi externe $K \times E \rightarrow E$ est elle aussi continue lorsqu'on munit K de sa topologie usuelle.*

Puisque par définition dans un evt les translations sont des homéomorphismes, une topologie d'evt sur un espace vectoriel E est caractérisée par la donnée d'un système fondamental $\tilde{\mathcal{V}}(0)$ de voisinages de 0 et pour chaque point $x \in E$ un système fondamental de voisinage $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ est alors donné par $\tilde{\mathcal{V}}(x) = \{x + V \mid V \in \tilde{\mathcal{V}}(0)\}$.

Les propriétés de continuité des deux lois définissant la structure algébrique d'espace vectoriel impliquent que l'ensemble $\mathcal{V}(0)$ des voisinages de 0 d'une topologie d'evt satisfait l'ensemble de propriétés (V0) suivant :

- (i) Si $V \in \mathcal{V}(0)$ et si $W \supset V$ alors $W \in \mathcal{V}(0)$;
- (ii) Si $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}(0)$ alors $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(0)$;

- (iii) Si $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $W \in \mathcal{V}(0)$ tel que $W + W \subset V$;
- (iv) Si $V \in \mathcal{V}(0)$ et si $\lambda \in K \setminus \{0\}$ alors $\lambda V \in \mathcal{V}(0)$;
- (v) Si $V \in \mathcal{V}(0)$, V est absorbant ;
- (vi) $\mathcal{V}(0)$ possède un système fondamental de voisinages équilibrés.

En fait cet ensemble de propriétés caractérise une topologie d'evt sur un espace vectoriel comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{V}(0)$ un ensemble de parties de E vérifiant les propriétés (V0), il existe alors une unique topologie sur E qui fait de E un espace vectoriel topologique, admettant pour tout $x \in A$, $x + \mathcal{V}(0)$ comme ensemble de voisinages de x .*

Définition 17. *Une application p d'un espace vectoriel E sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est une semi-norme si et seulement si*

- (1) $p(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $p(0) = 0$;
- (2) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$;
- (3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.

On obtient une topologie d'evt sur un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ en définissant un système fondamental de voisinages 0 en posant

$$\tilde{\mathcal{V}}(0) = \{V_{i,\varepsilon} \subset E \mid V_{i,\varepsilon} = \{x \in E \mid p_i(x) < \varepsilon\}, i \in I, \varepsilon > 0\}.$$

Topologie de $\mathcal{H}(U)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}(U)$ le sous espace vectoriel des applications continues de U dans $\mathbb{C}$. Si K est un compact de U et si $f \in \mathcal{C}(U)$, on pose

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

On munit $\mathcal{C}(U)$ de la topologie définie par la famille des semi-normes $\|\cdot\|_K$, où K décrit les parties compactes de U . Un système fondamental de voisinages de 0 est alors fourni par les ensembles

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{C}(U) \mid \|f\|_K < \varepsilon\}$$

avec $\varepsilon > 0$ et K compact de U .

Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties compactes de U , c'est-à-dire une suite parties compactes telles que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ (il suffit par exemple de prendre $K_n = \{z \in U \mid d(z, \mathbb{C} \setminus U) < \frac{1}{n}\} \cap D(0, n)$), la famille $V(K_n, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, forme clairement un système fondamental dénombrable de voisinage de 0, la topologie définie par les semi-normes $\|\cdot\|_K$, où K décrit les parties compactes de U est donc une topologie métrisable et si $f, g \in \mathcal{C}(U)$

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min 1, \|f - g\|_{K_n}$$

définit une distance compatible avec cette topologie.

Cette topologie est appelée *topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U* . Rappelons que $\mathcal{C}(U)$, munit de cette topologie est complet.

Nous allons maintenant traduire les propriétés des suite de fonctions holomorphes que nous avons obtenues dans le théorème de Weierstraß en termes topologiques sur le sous espace vectoriel $\mathcal{H}(U)$ de $\mathcal{C}(U)$ constitué des fonctions holomorphes sur U .

Théorème 24. *Le sous espace $\mathcal{H}(U)$ de $\mathcal{C}(U)$ est fermé dans $\mathcal{C}(U)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application $f \mapsto f^{(j)}$ de $\mathcal{H}(U)$ dans lui-même est continue.*

Le théorème d'Ascoli donne une caractérisation des parties compactes de $\mathcal{C}(U)$. Nous allons nous intéresser maintenant aux parties compactes de $\mathcal{H}(U)$.

Rappelons qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(U)$ est *bornée* si et seulement si pour toute partie compacte K de U , il existe une constante M_K telle que pour toute $f \in \mathcal{P}$ on ait $\|f\|_K < M_K$.

On déduit alors aisément des inégalités de Cauchy la proposition suivante :

Proposition 11. *Soit K un compact de U , $r > 0$ un nombre réel tel que pour tout $a \in K$ le disque fermé $\overline{D(a, r)}$ soit contenu dans U et $X = \cup_{a \in K} \overline{D(a, r)}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute $f \in \mathcal{H}(U)$, on a*

$$\frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_K \leq \frac{1}{r^k} \|f\|_X.$$

En particulier si $\mathcal{P}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$, il en est de même de $\{f^{(j)}, f \in \mathcal{P}\}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(U)$ est *équicontinue* en un point z_0 de U si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute $f \in \mathcal{P}$ et tout $z \in U$ tel que $|z - z_0| < \eta$ on a $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. La partie $\mathcal{P}$ est *équicontinue* sur U si et seulement si elle est équicontinue en tout point de U .

Ces définitions étant précisées nous pouvons rappeler l'énoncé du Théorème d'Ascoli.

Théorème 25 (d'Ascoli). *Pour qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(U)$ soit relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U il suffit que $\mathcal{P}$ soit équicontinue et bornée.*

Le théorème de Montel va prouver qu'en raison des inégalités de Cauchy la caractérisation des parties compactes de $\mathcal{H}(U)$ est plus simple que celle des parties compactes de $\mathcal{C}(U)$ et comparable à la situation de la dimension finie.

Théorème 26 (de Montel). *Pour qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}(U)$ soit relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit bornée.*

Démonstration : Montrons tout d'abord la condition nécessaire. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas bornée. Il existe alors un compact K de U tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_n\| \geq n$ et nous obtenons ainsi une suite de fonctions de $\mathcal{P}$ qui ne possède aucune sous suite convergeant uniformément sur K . La partie $\mathcal{P}$ n'est donc pas relativement compacte dans $\mathcal{H}(U)$.

Pour la condition suffisante, il suffit, par le Théorème d'Ascoli, de vérifier que si $\mathcal{P}$ est bornée elle est aussi équicontinue. Supposons que $\mathcal{P}$ est bornée et prouvons que $\mathcal{P}$ est équicontinue au voisinage de tout point z_0 de U . Soient $D = D(z_0, R)$ et $\tilde{D} = D(z_0, R + \delta)$, $\delta > 0$, deux disques de centre z_0 tels que $D \subset \subset \tilde{D} \subset \subset U$. Grâce aux inégalités de Cauchy, pour toute $f \in \mathcal{H}(U)$, on a

$$\|f'\|_D \leq \frac{1}{\delta} \|f\|_{\tilde{D}}.$$

Notons $M = \sup_{f \in \mathcal{P}} \|f\|_{\tilde{D}}$. Alors, pour toute $f \in \mathcal{P}$, on a $\|f'\|_D \leq \frac{M(\tilde{D})}{\delta} < +\infty$, puisque $\mathcal{P}$ est bornée.

Si z et z' sont deux points de D et si $t \in [0, 1]$ alors $tz + (1-t)z' \in D$ car D est convexe. Pour $f \in \mathcal{P}$, posons $\varphi(t) = f(tz + (1-t)z')$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\varphi'(t) = (z - z')f'(tz + (1-t)z')$, de plus par le Théorème des accroissements finis

$$|f(z) - f(z')| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq |z - z'| \|f'\|_D \leq \frac{M(\tilde{D})}{\delta} |z - z'|.$$

On en déduit que f est lipschitzienne et que on remarque que la constante de Lipschitz ne dépend pas du choix de f dans $\mathcal{P}$, par conséquent $\mathcal{P}$ est équicontinue sur D . $\square$

Théorème de la représentation conforme de Riemann

Le but de cette section est de prouver que tout domaine étoilé de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité. Il s'agit d'un cas particulier du Théorème de la représentation conforme de Riemann qui affirme que tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire sans trou ou plus précisément tel que son complémentaire ne possède aucune composante connexe bornée, distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité.

On note $D = D(0, 1)$ le disque de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$.

Remarquons que $\mathbb{C}$, bien qu'homéomorphe à D (par l'application $z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$), n'est pas biholomorphe à D . En effet si f est une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans D , f est bornée et donc constante par le Théorème de Liouville et par conséquent elle ne peut pas être injective.

Commençons par démontrer quelques propriétés des applications holomorphes de D dans D . Si $a \in \mathbb{C}$, on pose $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Notons que si $a \in D$, la fonction φ_a est définie et holomorphe sur D .

Proposition 12. *Une application φ de D dans D est un automorphisme de D , c'est-à-dire une application bijective et biholomorphe de D dans lui-même, si et seulement si il existe $a \in D$ tel que $\varphi = \lambda\varphi_a$ avec $|\lambda| = 1$.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\varphi_a(D) \subset D$. Pour $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_a(e^{it}) = \frac{|e^{it} - a|}{|1 - \bar{a}e^{it}|} = \frac{|e^{it} - a|}{|e^{-it} - \bar{a}|} = 1.$$

Par le principe du maximum on a donc $\varphi_a(D) \subset D$.

Remarquons que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \text{Id}$, donc par le théorème d'inversion locale φ_a est un automorphisme de D , de plus $\varphi_a(a) = 0$.

Soit g un automorphisme de D , on se ramène au cas où $g(0) = 0$ en remplaçant g par $h = \varphi_{g(0)} \circ g$. On peut donc appliquer le Lemme de Schwarz à h et à h^{-1} , on obtient ainsi pour tout $z \in D$, $|h(z)| \leq |z| \leq |h(z)|$, soit $|h(z)| = |z|$ et encore une fois par le Lemme de Schwarz $h(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

Si $g(0) = a$, on a donc $\varphi_a \circ g(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$, d'où

$$g(z) = \varphi_{-a}(\lambda z) = \frac{\lambda z + a}{1 + \bar{a}\lambda z} = \lambda \frac{z + \bar{\lambda}a}{1 + \bar{a}\lambda z} = \lambda \varphi_b(z)$$

avec $b = -a\bar{\lambda}$. □

Lemme 4. Soit f une fonction holomorphe dans D non injective et vérifiant $f(D) \subset D$, alors $|f'(0)| < 1$

Démonstration : Posons $a = f(0)$, alors la fonction $g = \varphi_a \circ f$ est non injective et vérifie $g(D) \subset D$ et $g(0) = 0$. En appliquant le Lemme de Schwarz à g on obtient $|g'(0)| < 1$ (si on avait $|g'(0)| = 1$, on aurait $g(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$ et g serait injective), soit $|\varphi'_a(a)f'(0)| < 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-|a|^2}|f'(0)| < 1$ et ainsi $|f'(0)| < 1 - |a|^2 < 1$. □

Théorème 27. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout fonction f holomorphe sur U , ne s'annulant pas sur U , il existe une fonction g holomorphe sur U telle que $f = g^2$. Alors l'ouvert U est biholomorphe à D .

Démonstration : On désigne par $\mathcal{P}$ le sous ensemble de $\mathcal{H}(U)$ constitué des applications f injectives de U dans D . La démonstration se divise en trois grandes étapes

Première étape. Montrons que $\mathcal{P}$ n'est pas vide. Nous allons construire une application g holomorphe, injective sur U dont l'image $g(U)$ évite un disque fermé $\overline{D(c, r)}$ de centre c et de rayon $r > 0$, ainsi pour tout $z \in U$ nous aurons $|g(z) - c| > r$ et en posant $f(z) = \frac{r}{g(z) - c}$ nous définirons une fonction holomorphe sur U , injective et telle que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in U$, soit $f(U) \subset D$. Une telle fonction f sera un élément de $\mathcal{P}$.

Fixons $a \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $z \mapsto z - a$ est holomorphe dans U et ne s'annule pas, il existe donc une fonction g holomorphe dans U telle que $(g(z))^2 = z - a$ pour tout $z \in U$. Notons que g ainsi définie est injective puisque, si $z, w \in U$, $g(z) = g(w)$ alors en élevant au carré $z - a = w - a$, soit $z = w$. Notons également que si $g(z) = -g(w)$ alors en élevant au carré on obtient encore $z - a = w - a$, soit $z = w$. Puisque la

fonction g ne s'annule pas on déduit de cette dernière assertion que si $x \in g(U)$ alors $-x \notin g(U)$.

Par ailleurs l'application g est holomorphe sur U , qui est connexe, et non constante donc ouverte et par conséquent il existe $b \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(b, r)$ soit contenu dans $g(U)$. La remarque précédente implique donc que $g(U) \cap D(-b, r) = \emptyset$ et donc $c = -b$ convient et nous avons construit la fonction g cherchée.

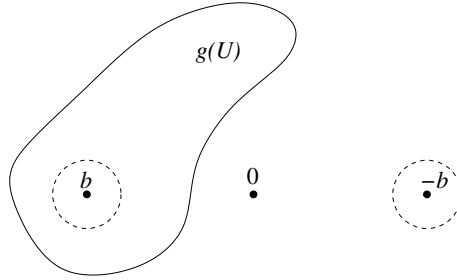


FIGURE 12 – Le domaine $g(U)$ ne rencontre ni l'origine, ni $D(-b, r)$.

Deuxième étape. Montrons que si z_0 est un point de U et si $f \in \mathcal{P}$ n'est pas surjective, il existe $h \in \mathcal{P}$ telle que $|h'(z_0)| > |f'(z_0)|$.

Puisque f n'est pas surjective, il existe $a \in D \setminus f(U)$ et en composant par l'automorphisme φ_a de D nous obtenons une application $\varphi_a \circ f \in \mathcal{P}$ qui ne s'annule pas sur U . Notons σ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\sigma(z) = z^2$. Par hypothèse il existe alors une fonction g holomorphe dans U telle que $\sigma \circ = \varphi_a \circ f$. L'application g est clairement injective et satisfait $g(U) \subset D$. Posons $b = g(z_0)$ et $h = \varphi_b \circ g$. La fonction h est clairement un élément de $\mathcal{P}$ et $h(z_0) = 0$. Posons $\psi = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ \varphi_{-b}$, alors

$$f = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ g = \varphi_{-a} \circ \sigma \circ \varphi_{-b} \circ \varphi_b \circ g = \psi \circ h$$

et $f'(z_0) = \psi'(0)h'(z_0)$.

L'application ψ est holomorphe, non injective de D dans D , car σ n'est pas injective, donc par le Lemme 4 on a $\psi'(0) < 1$. De plus f étant injective, $f'(z_0) \neq 0$ et par conséquent $|h'(z_0)| > |f'(z_0)|$.

Troisième étape. Soit z_0 un point de U , montrons qu'il existe $f \in \mathcal{P}$ telle que $|f'(z_0)| = \sup\{|g'(z_0)|, g \in \mathcal{P}\}$ et qu'une telle fonction f définit un isomorphisme de U sur D .

L'ensemble $\mathcal{P}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$ puisque si $f \in \mathcal{P}$ alors $f(U) \subset D$ (en effet pour tout $f \in \mathcal{P}$ et tout $z \in U$, on a $|f(z)| < 1$). On déduit alors des inégalités de Cauchy que $M = \sup\{|f'(z_0)|, f \in \mathcal{P}\} < +\infty$, de plus les éléments de $\mathcal{P}$ étant des fonctions holomorphes, injectives on a $M > 0$. On peut donc considérer une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que la suite de nombres réels $(|f'_n(z_0)|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M . Puisque $\mathcal{P}$ est bornée, donc relativement compacte par le Théorème de Montel, quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f holomorphe sur U et telle que $|f'(z_0)| = M$

par le Théorème de Weierstraß. Comme $M \neq 0$, la fonction f n'est pas constante et le Théorème 17 implique que f est injective puisque les f_n le sont.

Montrons que $f(U) \subset D$, ce qui implique que $f \in \mathcal{P}$. Par définition des éléments de $\mathcal{P}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(U) \subset D$ et par conséquent en tant que limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction f vérifie $f(U) \subset \overline{D}$, mais la fonction f n'étant pas constante elle est ouverte et donc $f(U) \subset D$.

Puisque $f \in \mathcal{P}$ et $|f'(z_0)| = M$, il résulte de la seconde étape que f qui est une application holomorphe injective de U dans D est de plus surjective. Le Théorème d'inversion locale prouve alors que f est un isomorphisme de U sur D . $\square$

Proposition 13. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ tel que toute fonction holomorphe sur U admet une primitive. Alors si f est une fonction holomorphe sur U qui ne s'annule pas sur U , il existe une fonction g holomorphe sur U telle que*

$$e^g = f.$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^$, il existe une fonction h holomorphe sur U telle que $h^k = f$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe une fonction g holomorphe sur U telle que $e^g = f$, alors $g'f = f'$. Puisque f ne s'annule pas la fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur U et par hypothèse possède une primitive dans U . Soient z_0 un point de U et $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = f(z_0)$, notons g la primitive de $\frac{f'}{f}$ qui prend la valeur w en z_0 , elle vérifie $e^g = f$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h = e^{\frac{g}{k}}$ est holomorphe sur U et vérifie $h^k = f$. $\square$

Le Théorème 27 et la Proposition 13 donnent le résultat suivant :

Corollaire 14. *Tout ouvert connexe de $\mathbb{C}$ sur lequel toute fonction holomorphe admet une primitive, en particulier tout ouvert convexe ou étoilé, distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité.*

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On note P et Q les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associent

$$P(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) .$$

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ P et Q sont continûment différentiables.
2. ☐ P et Q sont holomorphes.
3. ☐ $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
4. ☒ $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$
5. ☒ $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$
6. ☐ $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Vrai-Faux 2. Soit f une fonction holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $|f|^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
2. ☒ f^2 est holomorphe sur $\mathbb{C}$
3. ☐ $\operatorname{Re} f + i(\operatorname{Re} f)^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
4. ☐ $\overline{f}^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
5. ☐ $\frac{1}{f^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
6. ☐ $\frac{1}{f^2}$ est bijective sur $\mathbb{C}$
7. ☒ il existe un ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel f est bijective

Vrai-Faux 3. On note γ_1 , γ_2 et γ_3 les chemins définis sur $[0, \pi]$ par :

$$\gamma_1(t) = e^{it} , \quad \gamma_2(t) = -e^{-it} , \quad \gamma_3(t) = e^{i(t+\pi)} .$$

On note Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 les images respectives de γ_1 , γ_2 , γ_3 . Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ γ_1 et γ_2 sont des chemins équivalents
2. ☐ γ_2 et γ_3 sont des chemins équivalents

3. ☒ $\Gamma_1 = \Gamma_2$
4. ☐ $\Gamma_1 = \Gamma_3$
5. ☐ $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_3} f(z) dz$
6. ☒ $\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma_2} f(z) dz$
7. ☒ $\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma_3} f(z) dz$

Vrai-Faux 4. On note γ le chemin de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe e^{4it} si $t \in [0, \pi]$, et $2 - e^{-2it}$ si $t \in [\pi, 2\pi]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ L'indice de γ par rapport à 1 vaut 1
2. ☒ L'indice de γ par rapport à -1 n'est pas défini
3. ☒ L'indice de γ par rapport à $1 + i$ est nul
4. ☐ L'indice de γ par rapport à 2 vaut 1
5. ☐ L'indice de γ par rapport à 0 vaut 1
6. ☒ L'indice de γ par rapport à $\frac{1+i}{2}$ vaut 2
7. ☒ L'indice de γ par rapport à $\frac{3-i}{2}$ vaut -1

Vrai-Faux 5. On note γ le chemin de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe e^{4it} si $t \in [0, \pi]$, et $2 - e^{-2it}$ si $t \in [\pi, 2\pi]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega} d\omega = 2$
2. ☒ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega} d\omega = 4i\pi$
3. ☐ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega - 2} d\omega = 2i\pi$
4. ☒ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega + 2} d\omega = 0$
5. ☐ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega - 1 + i} d\omega = 2i\pi$
6. ☐ $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega - 2 + i} d\omega = 0$

Vrai-Faux 6. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $D(a, r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r : $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$. On note f la fonction qui à z associe $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
2. ☒ La fonction f est holomorphe sur $D(1, 1)$
3. ☒ La fonction f est holomorphe sur $D(1 + i, \sqrt{2})$
4. ☐ La fonction f est holomorphe sur $D(i, \sqrt{2})$
5. ☒ La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$
6. ☐ Le résidu de f en 0 est $\frac{1}{2}$
7. ☒ Le résidu de f en 2 est $\frac{1}{2}$

Vrai-Faux 7. On note f la fonction qui à z associe $f(z) = \frac{1}{2z-z^2}$. On note $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les chemins de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associent

$$\gamma_1(t) = e^{2it}; \quad \gamma_2(t) = 2 - e^{-it}; \quad \gamma_3(t) = \begin{cases} e^{4it} & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 2 - e^{-2it} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Le résidu de f en 0 est $-\frac{1}{2}$
2. ☒ Le résidu de f en 2 est $-\frac{1}{2}$
3. ☒ L'intégrale de f sur γ_1 est $2i\pi$
4. ☐ L'intégrale de f sur γ_2 est $-2i\pi$
5. ☐ L'intégrale de f sur γ_3 est $-i\pi$

Vrai-Faux 8. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si $|f|$ est bornée, alors f est constante.
2. ☐ Si $\operatorname{Re} f$ est bornée, alors f est constante.
3. ☐ Si $\operatorname{Re} f$ s'annule sur le segment $[0, 1]$, alors f est identiquement nulle.
4. ☒ Si $|f|$ s'annule sur le segment $[0, 1]$, alors f est identiquement nulle.
5. ☐ Si $\operatorname{Re} f$ admet un maximum, alors f est identiquement nulle.
6. ☒ Si $|f|$ admet un maximum relatif sur le disque ouvert $D(0, 1)$, alors f est constante.
7. ☒ L'image par f du disque ouvert $D(0, 1)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Vrai-Faux 9. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On note $D(0, 1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it})| < 1$, alors f a exactement un zéro dans $D(0, 1)$.
2. ☐ Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it}| < 1$, alors f a au moins deux zéros distincts dans $D(0, 1)$.

3. ☒ Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it}| < 1$, alors f a deux zéros distincts ou bien un zéro double dans $D(0, 1)$.
4. ☐ Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it} - \frac{1}{4}| < |e^{2it} + \frac{1}{4}|$, alors f ne s'annule pas dans $D(0, 1)$.
5. ☒ Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it} - 4| < |e^{2it} + 4|$, alors f ne s'annule pas dans $D(0, 1)$.

Vrai-Faux 10. On note f la fonction qui à z associe $\frac{1}{\sin(\pi z)}$. On note γ le chemin de $[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe $t + i \cos(\pi t)$ si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, $5 - t + i \cos(\pi t)$ si $t \in [\frac{5}{2}, \frac{11}{2}]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
2. ☒ La fonction f est holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$
3. ☒ La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$
4. ☒ L'ensemble des pôles de f est $\mathbb{Z}$
5. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le résidu de f en n est 1
6. ☒ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le résidu de f en $2n$ est $\frac{1}{\pi}$
7. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'indice de γ en $2n$ est -1
8. ☒ L'indice de γ en 0 est -1
9. ☐ L'indice de γ en 1 est -1
10. ☐ L'intégrale de f sur γ est $3i$
11. ☒ L'intégrale de f sur γ est $-6i$

2.2 Exercices

Exercice 1. Soit α un nombre complexe.

1. Déterminer le rayon de convergence R (éventuellement infini) de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ où $a_0 = 1$ et $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} a_k$ pour $k \geq 0$ (on discutera suivant les valeurs de α). On note D_R le disque de convergence de cette série et, si $z \in D_R$, on note

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

2. On suppose dans cette question que $\alpha \in \mathbb{N}$. Déterminer f .
3. Pour $z \in D_R$, comparer $(1+z)f'(z)$ et $f(z)$.
4. Pour $z \in D_R \cap (\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\})$, comparer $f(z)$ et $g(z) = \exp(\alpha \log(1+z))$. Ici $\log$ désigne la détermination principale du logarithme complexe.

5. En déduire que f se prolonge de manière unique en une fonction analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$. Calculer la valeur de cette fonction en $z = -1 + i$ si $\alpha = i$. Existe-t-il des valeurs de α ($\alpha \notin \mathbb{N}$) pour lesquelles f se prolonge en une fonction analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$?

Exercice 2. Pour chacun des couples (γ, f) suivants, calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$.

1. $\begin{array}{ccc} \gamma & & f \\ [0, \pi] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \gamma & & f \\ [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1 + it \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} \gamma & & f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1 + it \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{-|z|} \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} \gamma & & f \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t + i \end{array} ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{-z} \end{array}$

Exercice 3. Pour chacun des chemins fermés suivants :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \gamma & & \\ [0, 2\pi] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array} & \begin{array}{ccc} \gamma & & \\ [0, 2\pi] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{-it} \end{array} & \begin{array}{ccc} \gamma & & \\ [0, 4\pi] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} \gamma & & \\ [0, 4] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + i(t-1) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 3 - t + i & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ i(4-t) & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \end{array} \end{array}$$

1. Décrire l'image Γ de γ .
2. Donner les valeurs de $\text{Ind}_{\gamma}(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
3. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f : \omega \mapsto \frac{1}{\omega - \frac{1+i}{2}} ; \quad f : \omega \mapsto \frac{\omega}{\omega - \frac{1+i}{2}} ; \quad f : \omega \mapsto \frac{1}{(\omega - \frac{1+i}{2})^2}$$

Calculer $\int_{\gamma} f(\omega) d\omega$

Exercice 4. Soit γ un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soient a et b deux points distincts de $\mathbb{C}$ non situés sur l'image de γ .

1. Calculer l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ en fonction de l'indice de γ par rapport à a et par rapport à b .
2. Que peut-on dire de la valeur de l'intégrale lorsqu'il existe un chemin δ passant par a et b et ne rencontrant pas γ ?
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^2}$.
4. Calculer directement l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^2}$.

Exercice 5. On désigne par $\log$ la détermination principale du logarithme. On rappelle que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ coïncide avec le logarithme népérien que l'on notera également $\log$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos \theta) d\theta.$$

1. Montrer que l'intégrale I est bien définie.
2. Montrer que la fonction $\frac{\log z}{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.
3. Soit Γ_{ε} le chemin fermé contenu dans le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ qui borde le disque de centre 1 et de rayon 1 privé du disque de centre 0 et de rayon ε . Calculer

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\log z}{z-1} dz.$$

4. On note γ_{ε} la partie du chemin Γ_{ε} contenue dans le cercle de centre 0 et de rayon ε . Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{\log z}{z-1} dz = 0$.
5. Soit $\mathcal{C}_{\alpha}$ le chemin défini par $z = 1 + e^{it}$ pour $t \in [-\pi + \alpha, \pi - \alpha]$. Calculer $|1 + e^{i(\pi-\alpha)}|$. En déduire que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_{\alpha}} \frac{\log z}{z-1} dz$ existe et donner sa valeur.
6. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale I .

Exercice 6. Soit R un réel strictement positif et

$$S(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta}, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

le secteur de centre 0, de rayon R et d'angle $\frac{\pi}{4}$, on note $\gamma(R)$ le chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux défini par le bord orienté du secteur $S(R)$.

En intégrant la fonction e^{iz^2} sur le chemin $\gamma(R)$ montrer que

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos x^2 dx$$

et que

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x^2 dx$$

existent et calculer leurs valeurs.

Exercice 7. Soient P un polynôme de degré n :

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

et L l'opérateur linéaire à coefficients constants reproduisant ceux de P . On considère l'équation différentielle :

$$Lu = a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = 0.$$

Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ un chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans D , dont l'image Γ ne contient aucun zéro de P .

1. Soit f une fonction holomorphe sur D . Montrer que $u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{P(w)} e^{wz} dw$ est une fonction entière et exprimer Lu à l'aide d'une intégrale le long de γ .

Calculer Lu

- (i) si D est étoilé ;
- (ii) si f est la restriction à D d'une fonction entière ;
- (iii) si l'indice de γ par rapport à tout point z du complémentaire de D dans $\mathbb{C}$ est nul.

2. Soit $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et p un entier supérieur ou égal à 1. Calculer

$$u_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{wz}}{(w - w_0)^k} dw, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, p.$$

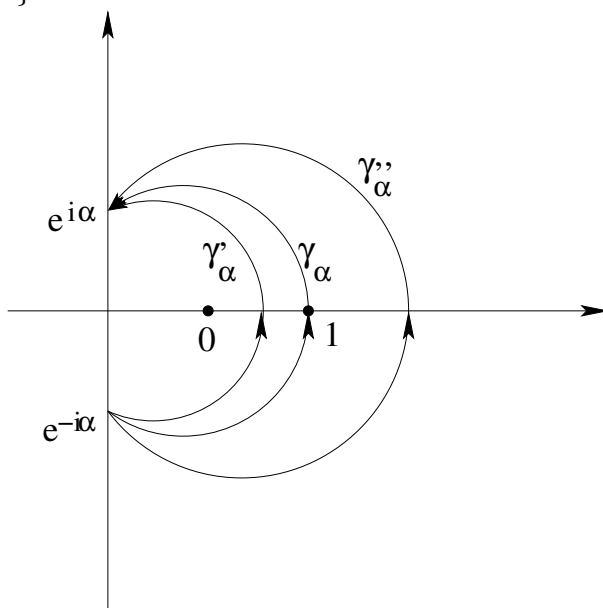
On suppose que w_0 est un zéro d'ordre p de P . Montrer que l'on obtient ainsi p solutions de l'équation différentielle $Lu = 0$ en appliquant la question 1 à des fonctions f que l'on précisera.

Exercice 8. Étant donné $\alpha \in]0, \pi[$, on note γ_{α} le chemin $[-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma_{\alpha}(\theta) = e^{i\theta}$. Soit φ_{α} la fonction définie sur le complémentaire de l'image Γ_{α} de γ_{α} par

$$\varphi_{\alpha}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\alpha}} \frac{w}{w - z} dw.$$

1. Montrer que φ_{α} est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma_{\alpha}$.
2. Écrire
 - (a) le développement de Laurent de $\varphi_{\alpha}(z)$ pour $|z| > 1$,
 - (b) le développement de Taylor en 0 de $\varphi_{\alpha}(z)$ pour $|z| < 1$,
3. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \varphi_{\alpha}(z)$ et montrer que cette limite est uniforme sur tout compact qui ne rencontre pas le cercle $|z| = 1$. En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \varphi'_{\alpha}(z)$ pour $|z| \neq 1$. Cette limite est-elle uniforme sur tout compact qui ne rencontre pas le cercle $|z| = 1$?

4. Soient γ'_α et γ''_α deux arcs de cercle du demi-plan $\{\operatorname{Re} z \geq \cos \alpha\}$, d'origine $e^{-i\alpha}$ et d'extrémité $e^{i\alpha}$, le premier tracé dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$ et le second dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.



- (a) Comparer $\varphi_\alpha(z)$ et $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'_\alpha} \frac{w}{w-z} dw$ pour $|z| < 1$;
 comparer $\varphi_\alpha(z)$ et $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma''_\alpha} \frac{w}{w-z} dw$ pour $|z| > 1$.
- (b) En déduire l'existence de $\lim_{z \rightarrow 1, |z| < 1} \varphi_\alpha(z)$ et $\lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \varphi_\alpha(z)$ et trouver leur différence.
5. Écrire $\varphi''_\alpha(z)$ sous la forme d'une intégrale. Montrer que φ''_α se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fraction rationnelle. Quels sont ses pôles ? Expliciter le calcul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
 En déduire le rayon de convergence du développement de Taylor de φ_α en un point $z_0 \notin \Gamma_\alpha$ et en particulier le rayon de convergence du développement obtenu au 1.b.

Exercice 9. Soit f une fonction holomorphe dans le disque épointé $D^*(0, 1) = D(0, 1) \setminus \{0\}$ de centre 0 et de rayon 1. On suppose que f n'a pas de zéros dans $D^*(0, 1)$.

1.
 - (a) Donner un exemple d'une fonction de ce type telle que $\frac{f'}{f}$ ait un pôle simple en 0.
 - (b) Donner un autre exemple tel que $\frac{f'}{f}$ ait un pôle multiple d'ordre $m > 1$ en 0 et tel que f ait un point singulier essentiel en 0.
2. Soit $N \in \mathbb{Z}$ un entier relatif non nul. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe h dans $D^*(0, 1)$ telle que $z^N = e^h$ dans $D^*(0, 1)$.

3. On considère la fonction holomorphe $\frac{f'}{f}$ sur $D^*(0, 1)$ et son développement de Laurent dans $D^*(0, 1)$:

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

- (a) Montrer que a_{-1} est un entier relatif.
 (b) Montrer qu'il existe un entier N et une fonction g holomorphe dans $D^*(0, 1)$ tels que

$$f = z^N e^g$$

dans $D^*(0, 1)$ et que cette factorisation est unique à un multiple entier de $2i\pi$ près pour g .

4. Discuter la nature de la singularité de $\frac{f'}{f}$ en 0 en fonction de la nature de la singularité de g en 0 et de l'entier N .

Exercice 10. On considère un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ et une fonction g holomorphe sur $\Delta = D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. On cherche les fonctions F qui vérifient les conditions suivantes :

(*) F holomorphe sur Δ et pour tout $z \in \Delta$ $F'(z) - g(z)F(z) = 0$.

- Δ est-il connexe ? (On pourra utiliser la connexité par arcs).
- Soit F une solution de (*).
 - Montrer que si F admet un zéro dans Δ alors F est identiquement nulle dans Δ .
 - Soit F_0 une solution non identiquement nulle. Montrer que toutes les solutions de E sont de la forme λF_0 où $\lambda \in \mathbb{C}$.
- On suppose que g admet une primitive sur Δ . Montrer que (*) admet une solution de la forme $F(z) = e^{G(z)}$.
 Trouver explicitement toutes les solutions de (*) si $g(z) = \frac{1}{z^2}$ et $\Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Quel type de singularité les solutions présentent-elles en 0 ?
- Soit φ une fonction holomorphe sur D ayant comme zéros dans D l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. On suppose que $g = \frac{\varphi'}{\varphi}$. Donner la forme des solutions de (*).
 En déduire les solutions de (*) dans le cas où $g(z) = \frac{m}{z-a}$ où $m \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ et $\Delta = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
- On suppose maintenant que D est un disque de $\mathbb{C}$ et $\text{Res}(g, a_k) = m_k \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq k \leq n$. On considère la fonction

$$h(z) = g(z) - \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - a_k}.$$

Montrer que h possède une primitive dans Δ .

En déduire la forme générale des solutions de (*).

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier telles que $|f| \leq |g|$.

Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$f = Cg.$$

Exercice 12. On note Δ le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé $\overline{\Delta}$ telle que, pour tout $z \in \partial\Delta$, $|f(z)| \geq 2$ et qui vérifie $f(0) = 1$.

La fonction f s'annule-t-elle dans Δ ?

Exercice 13.

1. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Supposons qu'il existe une constante M telle que pour tout point z_0 de la frontière de U ,

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq M.$$

Montrer que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$ de $\mathbb{C}$. On suppose que f possède un zéro d'ordre k à l'origine et que $|f|$ est majoré par une constante M sur $D(0, R)$.

1. Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$, f vérifie

$$|f| \leq M \left| \frac{z}{R} \right|^k.$$

2. Que peut-on dire s'il y a égalité en un point $z_0 \in D(0, R)$ dans l'inégalité précédente ?

Exercice 15. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, h une fonction holomorphe dans Ω , continue sur $\overline{\Omega}$, non constante, et telle que $|h|$ est constant sur la frontière de Ω .

1. Montrer que h admet au moins un zéro dans Ω
2. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$ (disque de centre 0 de rayon 1) continue sur $\overline{D(0, 1)}$ et de module constant sur le cercle $C(0, 1)$. Montrer avec soin que f soit est constante, soit f admet une factorisation de la forme

$$f(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_p)^{m_p} g(z)$$

où $p \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in D(0, 1)$, $m_i > 0$ et g est holomorphe et sans zéros dans D .

3. On suppose désormais f non constante.
 - (a) Soit $a \in D(0, 1)$, et $\phi_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $|\phi_a(z)| = 1$ si $|z| = 1$.
 - (b) Soit $h(z) = f(z) \prod_{i=1}^p \phi_{\alpha_i}(z)^{-m_i}$. Montrer que h définit une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$ satisfaisant $|h(z)| = \text{Cste}$ si $|z| = 1$.

(c) En déduire f .

Exercice 16. Si f est une fonction holomorphe non constante dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, on rappelle l'inégalité de Borel-Carathéodory

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|,$$

où $0 < r < R$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ et $A(R) = \sup_{|z| \leq R} \operatorname{Re} f(z)$.

Soit w un nombre complexe fixé. On définit la fonction f par $f(z) = ze^{-z} - w$ pour $z \in \mathbb{C}$. On suppose que f ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\frac{f'}{f}$ est une fonction entière.
2. En déduire qu'il existe une fonction entière g telle que $ze^{-z} - w = e^{g(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Montrer qu'il existe un nombre $R_0 > 0$ tel que pour tout z tel que $|z| \geq R_0$, la fonction g vérifie la majoration $\operatorname{Re} g(z) \leq 2|z|$.
4. En déduire qu'il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que :

$$|g(z)| \leq C_1|z| + C_2 \quad \text{pour } |z| \geq R_0.$$

5. Montrer que g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 :

$$g(z) = a_0z + a_1.$$

6. Montrer que l'égalité

$$ze^{-z} - w = e^{a_0z + a_1} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

est impossible. Conclure.

Exercice 17. Soient Ω et Ω' deux ouverts connexes de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application holomorphe telle que pour tout compact K de Ω' , $f^{-1}(K)$ soit un compact de Ω . On dira dans ce cas que f est propre.

1. Montrer par un raisonnement purement topologique simple que f est une application fermée, c'est-à-dire si F est un fermé de l'ouvert Ω , $f(F)$ est fermé dans Ω' .
2. Montrer que f est surjective, i.e. $f(\Omega) = \Omega'$.
3. En considérant l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par un polynôme non constant, en déduire une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert.

Exercice 18. On pose

$$f(z) = -1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{-nz}.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une fonction analytique sur le demi-plan $P = \{z = x + iy \mid x > 0\}$, continue et bornée sur $\overline{P}$. La fonction f admet-elle une période, et laquelle ?
2. Montrer que f est solution sur P de l'équation différentielle linéaire

$$(1) \quad w'' + w = \tanh\left(\frac{z}{2}\right).$$

Que peut-on dire de la différence de deux solutions de (1) ? Al'aide de la fonction f et de fonctions élémentaires, donner la solution générale de l'équation (1) pour $z \in P$. Quelles sont les solutions de période $2i\pi$? Quelles sont les solutions bornées sur P ?

3. Déterminer les pôles de la fonction $z \mapsto \tanh(\frac{z}{2})$, puis le plus grand ouvert U , étoilé par rapport à 0 et ne contenant aucun de ces pôles. Soient u et v deux fonctions analytiques sur U telles que

$$u'(z) = -\tanh\left(\frac{z}{2}\right) \sin z \quad \text{et} \quad v'(z) = \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \cos z.$$

Dire avec précision pourquoi il existe de telles fonctions et montrer que $z \mapsto u(z) \cos z + v(z) \sin z$ est solution de (1) pour $z \in U$.

4. En comparant les résultats des questions 2 et 3, montrer que f se prolonge en une fonction analytique sur U , encore notée f . On a évidemment $f(0) = -1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$. Montrer qu'on a aussi

$$f'(0) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}.$$

(On pourra appliquer la transformation d'Abel

$$a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} = \sum_{q=1}^p (a_n + \cdots + a_{n+q-1})(b_{n+q-1} - b_{n+q}) + (a_n + \cdots + a_{n+p}) b_{n+p}$$

avec $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ et $b_n = e^{-nx}$.)

Exercice 19. Pour tout entier $n > 0$ et tout $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on pose

$$S_n(z) = \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

1. Montrer que la suite S_n converge uniformément sur tout compact de Ω . En déduire que $g(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z)$ définit une fonction holomorphe sur Ω . $\pounds$
2. On considère la fonction φ définie sur Ω par $\varphi(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 - g(z)$.
Montrer que φ est 1-périodique (*i.e.* vérifie $\varphi(z+1) = \varphi(z)$ pour tout $z \in \Omega$).

3. Montrer que $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 - \frac{1}{z^2}$ admet une limite quand z tend vers 0 et en déduire que φ se prolonge en une fonction holomorphe 1-périodique sur $\mathbb{C}$.
4. On pose $z = x + iy$ (x et y réels). Calculer $|\sin(z)|^2$ et montrer que si $|y| > 1$ et $|x| \leq \frac{1}{2}$ on a

$$|\varphi(z)| \leq \left(\frac{\pi}{\sinh(\pi)}\right)^2 + 1 + 2 \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2}.$$

5. Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{C}$. Calculer $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(iy)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\sin(\pi iy)|$. En déduire que pour tout $z \in \Omega$ on a :

$$g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2.$$

Exercice 20. Pour tout couple de réels $0 \leq a < b$, on note $B(a, b)$ la bande $\{z \in \mathbb{C} ; a < \operatorname{Im} z < b\}$. Si T est un réel non nul, on dit qu'une fonction f holomorphe sur $B(a, b)$ est T -périodique si, pour tout $z \in B(a, b)$ on a $f(z + T) = f(z)$. On note aussi $B(0, +\infty)$ le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

A) Un cas particulier

1. Démontrer que la série

$$\sum_0^{+\infty} (-1)^n e^{(2n+1)iz}$$

définit une fonction holomorphe sur $B(0, +\infty)$.

2. Montrer que $\frac{1}{\cos z}$ est holomorphe sur $B(0, +\infty)$ et périodique de période 2π .
3. Etablir que pour tout $z \in B(0, +\infty)$ on a

$$\frac{1}{\cos z} = 2 \sum_0^{+\infty} (-1)^n e^{(2n+1)iz}.$$

B) Généralisation

1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{2\pi iz}{T}\right)$$

définit une application holomorphe de $B(a, b)$ sur la couronne $A(r, R)$ de centre 0 et de rayons $r = \exp\left(-\frac{2\pi}{T}b\right)$ et $R = \exp\left(-\frac{2\pi}{T}a\right)$.

2. Si f est holomorphe et périodique de période T sur $B(a, b)$ pour tout $u \in B(a, b)$ on pose $g(\varphi(u)) = f(u)$. Montrer que l'on définit ainsi une fonction holomorphe sur $A(r, R)$.

3. En utilisant le développement en série de Laurent de g , en déduire que f s'écrit de façon unique sous la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi n iz}{T}\right) \quad (8)$$

où les a_i sont des complexes tels que les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_{-n} z^n$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à $\exp\left(-\frac{2\pi}{T}a\right)$ et $\exp\left(-\frac{2\pi}{T}b\right)$ respectivement.

4. Montrer que réciproquement si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait ces conditions alors (8) définit une fonction holomorphe périodique de période T sur la bande $B(a, r)$.

Exercice 21.

- Montrer que l'intégrale $g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{z+t} dt$ est convergente pour z dans $\mathbb{C}$ privé de l'ensemble des réels négatifs ou nuls et définit une fonction holomorphe sur cet ensemble. (On pourra effectuer une intégration par parties).
- Pour $x > 0$ fixé, montrer en intégrant la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{x+z}$ sur un quart de cercle de rayon R bien choisi et en faisant tendre R vers $+\infty$ que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{x+t} dt = i \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+it} dt.$$

3. En déduire que pour $\operatorname{Re} z > 0$, on a :

$$g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-uz}}{1+u^2} du.$$

Exercice 22. Soit la fonction d'une variable complexe z définie par

$$f(z) = \int_1^{\infty} \frac{t-1}{t^2(t-z)} dt.$$

- Dans quel ouvert D du plan complexe f est-elle définie ?
- Montrer que f est holomorphe sur D . Calculer, en fonction de n , la dérivée n -ième de f en 0 et déterminer le développement en série entière de f au voisinage de 0 ; dans quel ouvert ce développement est-il valable ?
- Soit x un réel strictement inférieur à 1, calculer $f(x)$. En déduire la valeur de $f(z)$ pour $z \in D$.
- Calculer $f(z) + f\left(\frac{z}{z-1}\right)$ pour $z \in D$.

Exercice 23.

- Déterminer les singularités de la fonction de la variable complexe z :

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2 + 1)^2},$$

où t est un réel fixé. Calculer les résidus de f aux points singuliers.

2. Calculer par la méthode des résidus

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

où t est un nombre réel.

3. Soit $G(z) = z^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + z)^2} dx$.

- Dans quel ouvert D de $\mathbb{C}$ la fonction G est-elle définie ? Montrer que G est holomorphe sur D .
- Montrer que $F(t) = G(z)$ pour $z = t \in \mathbb{R}_+^*$.
- En déduire la valeur de $G(z)$ pour $z \in D$.

Exercice 24. On rappelle que les racines de $\sin z = 0$ sont réelles. Soit f la fonction méromorphe définie par

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{(z^2 + 1)^2}.$$

- Déterminer les points singuliers de f .
- Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles.
- Pour tout entier naturel N , soit Γ_N le bord orienté positivement du carré de sommets $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$ et $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$.
Montrer que si $\operatorname{Im}(z) \geq \frac{1}{2}$ on a $|\cot(\pi z)| \leq \coth \frac{\pi}{2}$ et que si $|\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{2}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\left| \cot \left(\pi \left(\frac{2k+1}{2} + iy \right) \right) \right| \leq \tanh \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

En déduire la limite quand N tend vers l'infini de

$$\int_{\Gamma_N} f(z) dz.$$

4. Calculer la somme de la série

$$\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2}.$$

Exercice 25. On note $\alpha = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et

$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + \exp(-2\alpha z)}.$$

- Montrer que g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n'a que des pôles simples que l'on déterminera.
- Soit Δ l'ensemble des pôles de g . Si $z \notin \Delta$ montrer que $g(z) - g(z + \alpha) = e^{-z^2}$.

3. En intégrant g le long du parallélogramme de sommets $R, R + \alpha, -R + \alpha$ et $-R$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Exercice 26. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôle réel telle que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Montrer que $x \mapsto F(x) \ln(|x|)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $\log$ la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ (sa partie imaginaire appartient à $] -\pi/2, 3\pi/2[$).

1. Soit r un réel strictement positif, pour $t \in [0, \pi]$ on pose $\gamma_r(t) = re^{it}$. Montrer que les limites suivantes existent et les calculer :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} F(z) \log(z) dz, \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} F(z) \log(z) dz.$$

2. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) \ln(|x|) dx = -2\pi \operatorname{Imm} \left(\sum_{a_i} \operatorname{Res}(F(z) \log(z), a_i) \right)$$

où les a_i sont les pôles de F dont la partie imaginaire est strictement positive.

3. Application : calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln |x|}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Exercice 27. Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère la fonction qui à z associe :

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}.$$

1. Montrer que la fonction f est méromorphe, calculer ses 4 pôles, et donner le résidu de f en chacun de ces pôles.
2. Soit R un réel positif. On note γ le chemin qui à $t \in [0, \pi]$ associe Re^{it} . Démontrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

3. On suppose $R > \max\{a, b\}$. En appliquant le théorème des résidus, calculer

$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz.$$

4. Dédurre de ce qui précède que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Exercice 28. On considère la fonction qui à z associe :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}.$$

1. Montrer que la fonction f est méromorphe, calculer ses 4 pôles, et donner le résidu de f en chacun de ces pôles.
2. Soit R un réel positif. On note γ le chemin qui à $t \in [0, \pi]$ associe Re^{it} . Démontrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

3. On suppose $R > 1$. En appliquant le théorème des résidus, calculer

$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz.$$

4. Dédurre de ce qui précède que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 29. Soit w un nombre complexe.

1. Montrer que si $|w| < \frac{1}{e}$, la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = ze^{-z} - w$ a un zéro unique dans le disque unité. On désigne par $h(w)$ cet unique zéro de f ; la fonction h est donc définie pour $|w| < \frac{1}{e}$.
2. Montrer que si γ désigne le cercle unité orienté positivement, on a :

$$(1) \quad h(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w} dz.$$

3. En déduire que pour $|w| < \frac{1}{e}$, on a $h(w) = w + \frac{2w^2}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{n!}w^n + \dots$
4. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $e^{\alpha h(w)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!}w^n$ pour $|w| < \frac{1}{e}$. On utilisera une intégrale analogue à (1).
5. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ pour x réel positif ou nul. Montrer que la série de fonctions de la variable réelle x

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+n)^{n-1}}{n!} x^n e^{-nx}$$

converge normalement pour $x \geq 0$. Montrer que $S(x) = e^{\alpha x}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et que $S(x) = e^{\alpha x'}$ pour $x \geq 1$, où x' est la solution appartenant à $[0, 1]$ de l'équation : $x'e^{-x'} = xe^{-x}$.

Exercice 30. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > 1$. Montrer que l'équation $z + e^{-z} - \lambda = 0$ a exactement une solution dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq 0$. On pourra considérer un demi disque de centre 0 et de rayon R assez grand.

Exercice 31. Soit D un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, contenant l'origine et f une application holomorphe de D dans lui-même telle que $f(0) = 0$. On va montrer que f est un automorphisme de D si et seulement si $|f'(0)| = 1$.

1. Montrer qu'il existe des constantes M_p , $p \in \mathbb{N}$, telles que pour toute fonction g holomorphe dans D vérifiant $g(D) \subset D$, on ait :

$$|g^{(p)}(0)| \leq M_p.$$

2. Soit f une fonction holomorphe dans D vérifiant $f(D) \subset D$ et $f(0) = 0$.
 - (a) On définit les fonctions f_n par $f_1 = f$ et la relation de récurrence $f_{n+1} = f \circ f_n$ si $n \geq 1$. Montrer que f_n est holomorphe dans D et calculer $f'_n(0)$ en fonction de $f'(0)$.
 - (b) En déduire que $|f'(0)| \leq 1$.
 - (c) Montrer que, si f est un automorphisme de D , $|f'(0)| = 1$.
3. Montrer que, si $f'(0) = 1$, $f(z) = z$ pour tout $z \in D$. (On raisonnera par l'absurde en supposant que le développement de f en série entière à l'origine s'écrit :

$$f(z) = z + \sum_{k=p}^{+\infty} c_k z^k,$$

p étant un entier strictement supérieur à 1, et on calculera le coefficient de z^p dans le développement de f_n .)

4. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, tel que $f'(0)^k = 1$. Montrer que f est un automorphisme de D .
5. On munit l'espace $\mathcal{H}(D)$ des fonctions holomorphes dans D de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D .
 - (a) Montrer que l'ensemble des fonctions g holomorphes dans D vérifiant $g(D) \subset D$ et $g(0) = 0$ est une partie compacte de $\mathcal{H}(D)$.
 - (b) On suppose que $f'(0) = \lambda$, $|\lambda| = 1$ et que l'ensemble $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ est dense l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact de D vers l'identité de D .
6. Montrer que pour toute suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes sur D qui converge vers une fonction g uniformément sur tout compact de D , si g prend la valeur w et n'est pas la fonction constante égale à w , alors pour n assez grand la fonction g_n prend la valeur w .

7. On rappelle que tout sous-groupe multiplicatif du groupe des nombres complexes de module 1 est fini ou dense.

Déduire de ce qui précède que, si $|f'(0)| = 1$, f est une application injective et surjective de D sur lui-même.

Exercice 32. Calculer le développement en série de Laurent de f en a dans les cas suivants.

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en $a = 0$
2. $f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$ en $a = 0$
3. $f(z) = (z - 3) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ en $a = -2$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On note P et Q les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associent

$$P(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

- ☐ A P et Q sont continûment différentiables
- ☐ B $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$
- ☐ C $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$
- ☐ D $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$
- ☐ E $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Question 2. Soit f une fonction holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$.

- ☐ A $\sin(f)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ B $\log(f)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ C $f \circ f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ D f est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
- ☐ E $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

Question 3. On note γ_1 , γ_2 et γ_3 les chemins définis sur $[0, \pi]$ par :

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = -e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{3it}.$$

On note Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 les images respectives de γ_1 , γ_2 , γ_3 .

- ☐ A $\Gamma_2 = \Gamma_3$
- ☐ B $\Gamma_1 = \Gamma_2$
- ☐ C γ_3 est un chemin fermé
- ☐ D $\int_{\gamma_2} \frac{1}{\omega} d\omega = 2i\pi$
- ☐ E $\int_{\gamma_1} \omega^2 d\omega = \int_{\gamma_3} \omega^2 d\omega$

Question 4. On note γ le chemin de $[0, 3\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{3it} & \text{si } t \in [0, \pi] \\ -2 + e^{-2it} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \\ -e^{it} & \text{si } t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}.$$

- ☐ A L'indice de γ par rapport à 0 vaut 1
- ☐ B L'indice de γ par rapport à $\frac{1}{2}$ n'est pas défini
- ☐ C L'indice de γ par rapport à $-\frac{i}{2}$ vaut 1
- ☐ D L'indice de γ par rapport à $-1 + i$ vaut 0
- ☐ E L'indice de γ par rapport à -2 vaut -1

Question 5. On note γ le chemin de $[0, 3\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{3it} & \text{si } t \in [0, \pi] \\ -2 + e^{-2it} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \\ -e^{it} & \text{si } t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}.$$

- ☐ A $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega} d\omega = 0$
- ☐ B $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega + 2} d\omega = 2i\pi$
- ☐ C $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega + 1 - i} d\omega = 0$
- ☐ D $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega - 1 + i} d\omega = -2i\pi$
- ☐ E $\int_{\gamma} \frac{1}{\omega + 2 - \frac{i}{2}} d\omega = -2i\pi$

Question 6. On note f la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

- ☐ A La fonction f est holomorphe sur le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z - 1| < \sqrt{2}\}$.
- ☐ B La fonction f est holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$.
- ☐ C La fonction f est holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$.
- ☐ D La fonction f est holomorphe sur le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$.
- ☐ E La fonction f est holomorphe sur le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z + 1| < 2\}$.

Question 7. On note f la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

- ☐ A Le résidu de f en 1 est 2.
- ☐ B Le résidu de f en 0 est 1.
- ☐ C Le résidu de f en i est $-\frac{i}{2}$.
- ☐ D Le résidu de f en $-i$ est $\frac{i}{2}$.
- ☐ E Le résidu de f en -1 est i .

Question 8. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

- ☐ A Si $\text{Im } f$ admet un maximum relatif, alors f est nulle sur $\mathbb{C}$.
- ☐ B Si $|f|$ est constante sur le segment $[-1, 1]$, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.
- ☐ C Si $|f|$ est nulle sur le segment $[-1, 1]$, alors f est identiquement nulle.
- ☐ D Si $|f|$ admet un maximum relatif sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re } z > 0\}$, alors f est constante.
- ☐ E L'image par f du demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re } z > 0\}$ est un demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$.

Question 9. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On note $D(0, 1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

- ☐ A Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{3it}| < 1$, alors f a trois zéros dans $D(0, 1)$, comptés avec leur ordre de multiplicité.
- ☐ B Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{it}| < 1$, alors f ne s'annule pas dans $D(0, 1)$.
- ☐ C Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it} + 4| < |e^{2it} - 4|$, alors f a au moins deux zéros dans $D(0, 1)$.
- ☐ D Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{2it} + 2| < |e^{2it} - 2|$, alors f ne s'annule pas dans $D(0, 1)$.
- ☐ E Si pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f(e^{it}) - e^{3it} - 8| < |e^{3it} + 8|$, alors f a au moins un zéro dans $D(0, 1)$.

Question 10. On note f la fonction qui à z associe $\tan(\frac{\pi}{2}z)$.

- ☐ A La fonction f a un pôle d'ordre 2 en chaque entier $n \in \mathbb{Z}$.
- ☐ B La fonction f a une singularité essentielle en 0.
- ☐ C Le résidu de f en 1 est $-\frac{2}{\pi}$.
- ☐ D Le résidu de f en 0 est $-\frac{1}{\pi}$.
- ☐ E La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Réponses : 1-AB 2-AC 3-AE 4-DE 5-CE 6-AC 7-CD 8-CD 9-AD 10-CE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous trois heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Montrer que toute fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique dans cet ouvert.
 2. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et a un point de U . Que peut-on dire du rayon de convergence de la série de Taylor de f en a ?
 3. Énoncer et démontrer les inégalités de Cauchy.
 4. Quel est l'intérêt des inégalités de Cauchy ?
 5. Énoncer et démontrer le théorème de Liouville et en déduire que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
-

Exercice 1 : Soit a un réel strictement positif. On note $I(a)$ l'intégrale convergente suivante.

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a x^2} dx .$$

1. En appliquant le théorème de Cauchy sur le rectangle R_r de sommets $\pm r, \pm r + iy$, montrer que pour tout réel y ,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a (x+iy)^2} dx = I(a) .$$

2. Montrer que

$$e^{-\pi a y^2} \left| I(a) - \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a (x+iy)^2} dx \right| \leq I(a) - \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a x^2} dx .$$

En déduire que le membre de gauche de cette inégalité tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, uniformément en y sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on note $[\alpha, \beta] = \{z = t\alpha + (1-t)\beta, t \in [0, 1]\}$ le segment de droite d'extrémités α et β . On pose

$$f(z) = \frac{e^{-\pi a z^2}}{e^{2i\pi z} - 1} .$$

À l'aide d'un développement en série de $\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}$, montrer que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r+i, r+i]} f(z) dz = -I(a) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} .$$

4. À l'aide d'un développement en série de $\frac{e^{-2i\pi z}}{1 - e^{-2i\pi z}}$, montrer que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r-i, r-i]} f(z) dz = I(a) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} .$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer le résidu de f en n .
6. En appliquant le théorème des résidus à f sur le rectangle de sommets $\pm(N+\frac{1}{2})\pm i$, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a n^2} = I(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

7. Montrer que $I(1) = 1$. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $I(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$.
8. Montrer que si la partie réelle de z est strictement positive,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z n^2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{z}},$$

où $\sqrt{z}$ désigne la racine carrée de z , dont la partie réelle est positive sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Exercice 2 : On note D le demi plan ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. On définit la « fonction Gamma » sur D par :

$$\forall z \in D, \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que Γ est une fonction holomorphe sur D .
2. Montrer que pour tout $z \in D$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Montrer que pour tout $z \in D$,

$$\Gamma(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \right) + \left(\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right).$$

4. Démontrer que la fonction qui à z associe

$$\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

5. Déduire des deux questions précédentes que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le résidu de Γ en $-n$?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in D$,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

(on pourra utiliser le changement de variable $\frac{t}{n} \mapsto u$, puis une intégration par parties).

7. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $z \in D$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} .$$

(formule de Gauss).

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Soit f une fonction holomorphe dans U , nous devons prouver que f est développable en série entière au voisinage de tout point de U . Soit $a \in U$ et $r > 0$ tel que le disque $D(a, r)$ soit contenu dans U . Soit γ le chemin défini pour $t \in [0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = a + re^{it}$. Pour $z \in D(a, r)$, la formule de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Si $z \in D(a, r)$ et si w vérifie $|w - a| = r$, on a $|z - a| < |w - a|$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{1}{w - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \\ &= \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n f(w)}{(w - a)^{n+1}} .$$

Cette série de fonctions de w est normalement convergente donc uniformément convergente sur le cercle $\mathcal{C}(a, r)$ puisque son terme général est majoré par

$$\frac{M}{r} \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n \quad \text{avec} \quad M = \sup_{w \in \mathcal{C}(a, r)} |f(w)| ,$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. On peut donc intégrer terme à terme et on trouve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw .$$

La fonction f est donc développable en série entière sur le disque $D(a, r)$ et par conséquent analytique dans U .

2. Par la démonstration précédente f est développable en série entière sur tout disque de centre a contenu dans U . Donc la série de Taylor en a de f coïncide avec f au moins sur le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U . Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à la distance de a au bord de U .

3. Inégalités de Cauchy

Si f est une fonction holomorphe dans le disque de centre a et de rayon R , pour tout $0 < r < R$ et $n \geq 0$ on a, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$,

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r)}{r^n},$$

où $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Cette inégalité se démontre ainsi. D'après le 1) et le 2) la fonction f est développable en série entière dans le disque $D(a, R)$ et on a pour tout r tel que $0 < r < R$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{-n} e^{-int} dt \end{aligned}$$

Si on pose $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$, on a alors pour $n \geq 0$

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| r^{-n} dt \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

4. Les inégalités de Cauchy permettent de contrôler la valeur des dérivées en un point d'une fonction holomorphe par la valeur de cette fonction au voisinage de ce point. Cela permet de simplifier l'étude des suites de fonctions et des intégrales dépendant d'un paramètre dans le cas holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ par rapport au cas $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert de $\mathbb{R}$.

5. Théorème de Liouville

Si f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier et si f est bornée, alors f est constante.

Ce théorème se démontre ainsi. Puisque f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et les inégalités de Cauchy donnent alors $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout $r > 0$ et tout $n \geq 0$, ce qui implique $a_n = 0$, si $n \geq 1$.

Montrons par contraposée que tout polynôme à coefficients complexes non constant possède au moins une racine. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré strictement supérieur à 1, supposons que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}$. La fonction $\frac{1}{P(z)}$ est alors holomorphe dans $\mathbb{C}$ et bornée puisque $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow \infty$, elle est donc constante par le Théorème de Liouville.

Exercice 1 :

1. La fonction $f : z \mapsto e^{-\pi a z^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Donc par le théorème de Cauchy appliqué à f sur le bord du rectangle R_r ,

$$\int_{-r}^{+r} e^{-\pi a x^2} dx + \int_0^y e^{-\pi a(r+it)^2} i dx - \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+iy)^2} dx = - \int_0^y e^{-\pi a(-r+it)^2} i dx = 0$$

Pour r et t réels,

$$\left| e^{-\pi a(r+it)^2} \right| = \left| e^{-\pi a(-r+it)^2} \right| = e^{-\pi a r^2} e^{\pi a t^2}.$$

Chacune des deux intégrales sur les bords verticaux du rectangle est donc majorée en module par :

$$e^{-\pi a r^2} \int_0^{|y|} e^{\pi a t^2} dt,$$

quantité qui tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+iy)^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a x^2} dx = I(a).$$

2. Soient r et R deux réels tels que $0 < r < R$. Puisque $|e^{-\pi a(x+iy)^2}| = e^{\pi a y^2} e^{-\pi a x^2}$,

$$\begin{aligned} & e^{-\pi a y^2} \left| \int_{-R}^{+R} e^{-\pi a(x+iy)^2} dx - \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+iy)^2} dx \right| \\ & \leq \int_{-R}^{-r} e^{-\pi a x^2} dx + \int_{+r}^{+R} e^{-\pi a x^2} dx \\ & = \int_{-R}^{+R} e^{-\pi a x^2} dx - \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a x^2} dx. \end{aligned}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient l'inégalité cherchée. Le majorant est indépendant de y et tend vers 0 quand r tend vers l'infini, donc la convergence vers 0 du membre de gauche est uniforme en y sur $\mathbb{R}$.

3. Si $z = i + t$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi} < 1$. La série de terme général $(e^{2i\pi z})^n$ converge donc uniformément en z , et :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-\pi a z^2}}{e^{2i\pi z} - 1} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi a z^2} (e^{2i\pi z})^n \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi a z^2 + 2ni\pi z} \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} e^{-\pi a(z - i\frac{n}{a})^2}. \end{aligned}$$

Cette série de fonctions converge uniformément en z sur le segment $[-r+i, r+i]$.
Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{[-r+i, r+i]} f(z) dz &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} \int_{[-r+i, r+i]} e^{-\pi a(z-i\frac{n}{a})^2} dz \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+i-i\frac{n}{a})^2} dx . \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$e^{-\pi a(1-\frac{n}{a})^2} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+i-i\frac{n}{a})^2} dx$$

converge vers $e^{-\pi a(1-\frac{n}{a})^2} I(a)$, uniformément en n . Écrivons donc :

$$\begin{aligned} \int_{[-r+i, r+i]} f(z) dz &= - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} e^{\pi a(1-\frac{n}{a})^2} e^{-\pi a(1-\frac{n}{a})^2} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+i-i\frac{n}{a})^2} dx \\ &= -e^{\pi a} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n} e^{-\pi a(1-\frac{n}{a})^2} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x+i-i\frac{n}{a})^2} dx . \end{aligned}$$

La limite quand r tend vers l'infini est donc :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r+i, r+i]} f(z) dz &= -e^{\pi a} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n} e^{-\pi a(1-\frac{n}{a})^2} I(a) \\ &= -I(a) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} . \end{aligned}$$

4. Si $z = -i + t$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors $|e^{-2i\pi z}| = e^{-2\pi} < 1$. La série de terme général $(e^{-2i\pi z})^n$ converge donc uniformément en z , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-\pi a z^2} e^{-2i\pi z}}{1 - e^{-2i\pi z}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi a z^2} (e^{-2i\pi z})^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi a z^2 - 2ni\pi z} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} e^{-\pi a(z+i\frac{n}{a})^2} . \end{aligned}$$

On applique la démarche de la question précédente, en remplaçant $+i$ par $-i$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[-r-i, r-i]} f(z) dz &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} \int_{[-r-i, r-i]} e^{-\pi a(z+i\frac{n}{a})^2} dz \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x-i+i\frac{n}{a})^2} dx . \end{aligned}$$

Le résultat de la question 3 conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \int_{[-r-i, r-i]} f(z) dz &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} e^{\pi a(-1+\frac{n}{a})^2} e^{-\pi a(-1+\frac{n}{a})^2} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x-i+i\frac{n}{a})^2} dx \\ &= e^{\pi a} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\pi n} e^{-\pi a(-1+\frac{n}{a})^2} \int_{-r}^{+r} e^{-\pi a(x-i+i\frac{n}{a})^2} dx . \end{aligned}$$

La limite quand r tend vers l'infini est donc :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r-i, r-i]} f(z) dz &= e^{\pi a} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\pi n} e^{-\pi a(-1+\frac{n}{a})^2} I(a) \\ &= I(a) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} . \end{aligned}$$

5. Le dénominateur de f , $e^{2i\pi(z-n)} - 1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'écrit :

$$e^{2i\pi(z-n)} - 1 = 2i\pi(z-n) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2i\pi(z-n))^k}{k!} .$$

Donc :

$$\text{Res}(f, n) = \lim_{z \rightarrow n} (z-n)f(z) = \frac{e^{-\pi an^2}}{2i\pi} .$$

6. Le théorème des résidus, appliqué à f sur le rectangle de sommets $\pm(N + \frac{1}{2}) \pm i$, donne :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2i\pi \sum_{n=-N}^{+N} \text{Res}(f, n) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{-\pi an^2} ,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{[-N-\frac{1}{2}-i, N+\frac{1}{2}-i]} f(z) dz , & I_2 &= \int_{[N+\frac{1}{2}-i, N+\frac{1}{2}+i]} f(z) dz , \\ I_3 &= \int_{[N+\frac{1}{2}+i, -N-\frac{1}{2}+i]} f(z) dz , & I_4 &= \int_{[-N-\frac{1}{2}+i, -N-\frac{1}{2}-i]} f(z) dz . \end{aligned}$$

D'après les questions 3 et 4, $I_1 + I_3$ converge, quand N tend vers l'infini, vers :

$$I(a) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} - \left(-I(a) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} \right) = I(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{a}}.$$

Il suffit donc de démontrer que les intégrales I_2 et I_4 tendent vers 0. Il est facile de vérifier qu'elles sont égales. La majoration suivante est analogue à celle de la question 1.

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{[N+\frac{1}{2}-i, N+\frac{1}{2}+i]} f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\pi a(N+\frac{1}{2}+it)^2}}{e^{2i\pi(N+\frac{1}{2}+it)} - 1} dt \right| \\ &\leq e^{-\pi a(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\pi a t^2}}{|e^{2i\pi(N+\frac{1}{2}+it)} - 1|} dt \\ &= e^{-\pi a(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\pi a t^2}}{e^{-2\pi t} + 1} dt. \end{aligned}$$

Donc I_2 et I_4 tendent vers 0 quand N tend vers l'infini.

7. En remplaçant a par 1 dans l'identité de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2} = I(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2},$$

donc $I(1) = 1$. Le changement de variable $x \mapsto \frac{y}{\sqrt{a}}$ donne :

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} I(1) = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

8. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout z tel que $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$, $|e^{-\pi z n^2}| \leq e^{-\pi \varepsilon n^2}$. Par conséquent la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z n^2}$ converge normalement, donc uniformément, sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$. Elle définit donc une fonction holomorphe. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cette fonction holomorphe est définie sur le demi-plan $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Les deux fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{z}}$$

sont holomorphes sur D . Or d'après les questions précédentes, elles coïncident sur la demi-droite $\{a \in \mathbb{R}, a > 0\}$. D'après le principe des zéros isolés, elles coïncident donc sur D , puisque D est connexe.

Exercice 2 :

1. Pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction qui à t associe $t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $\Gamma(z)$ est bien défini. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction qui à z associe $t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe sur D . Pour appliquer le théorème d'holomorphicité sous le signe somme (intégrale dépendant d'un paramètre), nous devons majorer le module de cette fonction par une fonction intégrable ne dépendant pas de z , sur tout compact de D . Soit K un compact de D . Il existe deux réels a et b tels que pour tout $z \in K$, $0 < a < \operatorname{Re} z < b$. Pour tout $z \in K$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}e^{-t} \leq \max\{t^{a-1}e^{-t}, t^{b-1}e^{-t}\}.$$

Le majorant est bien une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où le résultat.

2. Pour $z \in D$, intégrons par parties $\Gamma(z+1)$.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt.$$

or pour tout $z \in D$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^z e^{-t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^z e^{-t} = 0.$$

Donc $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Pour $z = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Par la relation de Chasles,

$$\Gamma(z) = \left(\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt\right) + \left(\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt\right).$$

Pour $t \in [0, 1]$,

$$t^{z-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}.$$

Cette série de fonctions continues converge normalement sur $[0, 1]$, car pour $n \geq 2$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| \leq \frac{1}{n!}.$$

On peut donc intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} . \end{aligned}$$

4. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, la fonction $z \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe un réel M tel que pour tout $z \in K$, $\operatorname{Re} z \leq M$, donc pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\left| t^{z-1} e^{-t} \right| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t} \leq t^{M-1} e^{-t} .$$

Le majorant est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction qui à z associe

$$\int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$, par le théorème d'holomorphie sous le signe somme.

5. La série de fonctions méromorphes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

converge normalement, donc uniformément, sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Elle définit donc une fonction méromorphe dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. D'après les questions précédentes, pour $z \in D$, Γ est la somme de cette fonction et d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Elle se prolonge donc en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le résidu de Γ en $-n$ est $\frac{(-1)^n}{n!}$.

6. Commençons par effectuer le changement de variable $\frac{t}{n} \mapsto u$.

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du .$$

Posons $I_n(z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du$, et intégrons par parties.

$$I_n(z) = \left[(1-u)^n \frac{u^z}{z} \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du = \frac{n}{z} I_{n-1}(z+1) .$$

Donc par récurrence,

$$I_n(z) = \frac{n!}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} I_0(z+n)$$

Or

$$I_0(z+n) = \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \left[\frac{t^{z+n}}{z+n} \right]_0^1 = \frac{1}{z+n} .$$

Au bilan,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z I_n = \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} .$$

7. Pour tout $u \in [0, 1]$, $1 - u \leq e^{-u}$. Donc pour tout $t \in [0, n]$, $1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$, soit $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, et pour tout $z \in D$,

$$\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathbb{I}_{[0,n]}(t) \right| \leq e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} ,$$

où $\mathbb{I}_{[0,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n]$: $\mathbb{I}_{[0,n]}(t) = 1$ si $t \in [0, n]$ et $\mathbb{I}_{[0,n]}(t) = 0$ sinon. Le majorant est indépendant de n , et il est intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$ et pour tout $z \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = e^{-t} t^{z-1}$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z) .$$

D'où le résultat.

3 Compléments

3.1 D'illustres inconnus

Cela ne vous aura pas échappé : ce chapitre est largement dominé par la stature imposante d'Augustin Louis Cauchy (1789–1857). Celui-ci n'est pourtant pas l'inventeur des nombres complexes, issus d'un long cheminement partant de la résolution des équations algébriques. Vous en raconter certains passages nous donnera l'occasion d'évoquer quelques mathématiciens beaucoup moins connus que Cauchy.

Au XVI^e siècle, à la suite de l'intense bagarre pour la résolution des équations du troisième, puis du quatrième degré, Bombelli avait osé écrire des règles de calcul pour des quantités contenant « piu di meno », à savoir $\sqrt{-1}$. Mais ces nombres, qualifiés d'« enveloppés » par Girard, puis d'« imaginaires » par Descartes n'étaient alors conçus que comme un artifice de calcul, qui s'il n'avait pas d'interprétation tangible, permettait néanmoins de calculer parfois des solutions bien réelles. Girard fut le premier à oser compter toutes les solutions d'une équation algébrique, vers 1600¹.

Ainsi qu'on peut donner trois noms aux équations, soit qu'il y en a qui sont plus que rien ; d'autres moins que rien ; & d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme $\sqrt{-3}$ ou autres nombres semblables.

Il énonce alors ce qui deviendra le « théorème fondamental de l'algèbre » : tout polynôme de degré n a n racines. Il donne aussi l'expression des coefficients en fonction des racines. En 1637, Descartes enfonce le clou :

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant il peut y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. [...] Mais souvent il arrive, que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelques fois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine.

Pendant plus d'un siècle, on allait s'accomoder de la situation. À peu près en même temps, vers 1746, Euler et d'Alembert tentent de justifier ce qui avait fini par devenir une évidence. Voici ce qu'écrivit d'Alembert.

Soit un multinôme quelconque $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x , y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x , et qui rendra ce multinôme égal à zéro.

La démonstration d'Euler, comme celle de d'Alembert, utilisait des arguments d'analyse dont la justification rigoureuse allait attendre encore un bon siècle. Surtout, le postulat

1. O. Kouteynikoff : La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre *Bull. APMEP* 462, p.122–137 (2005)

de l'existence des n racines restait plus ou moins explicitement admis, sans que leur statut soit explicité. Dans sa thèse en 1799, le jeune Gauss ne se prive pas de critiquer ses prédécesseurs.

Comme nous ne pouvons pas imaginer d'autres formes de grandeurs autres que réelles ou imaginaires, il n'est pas entièrement clair en quoi ce qui est à démontrer diffère de ce qui est supposé ; mais en supposant que nous puissions penser à d'autres formes de grandeurs [...]

Comment ces grandeurs, dont nous n'avons aucune espèce de représentation – ces ombres d'ombres – doivent être ajoutées ou multipliées, cela ne peut pas être énoncé avec le degré de clarté nécessaire en mathématiques. [...]

Si on mène des opérations avec ces racines impossibles, comme si elles existaient, et si on dit par exemple, que la somme de toutes les racines de l'équation $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots = 0$ est égale à $-a$ même si certaines d'entre elles peuvent être impossibles (ce qui signifie réellement : même si certaines sont non-existantes et donc manquantes), alors je ne peux que dire que je désapprouve totalement ce genre d'argument.

Gauss donnera au cours de sa carrière 4 démonstrations différentes du théorème : celle de 1799, encore incomplète, deux en 1816 et une dernière en 1849, cinquante ans après la première ! Il ne fut pas le seul. Voici comment Cauchy introduit sa « Seconde note sur les racines imaginaires des équations », publiée au Bulletin de la Société Philomatique en 1817.

Qu'il soit toujours possible de décomposer un polynôme en produit de facteurs réels du premier et du second degré ; ou, en d'autres termes, que toute équation, dont le premier membre est une fonction rationnelle ou entière de la variable x , puisse toujours être vérifiée par des valeurs réelles ou imaginaires de cette variable : c'est une proposition que l'on a déjà prouvée de plusieurs manières. MM. Lagrange, Laplace et Gauss ont déjà employé diverses méthodes pour l'établir ; et j'en ai moi-même donné une démonstration fondée sur des considérations analogues à celles dont M. Gauss a fait usage.

Étonnamment, les 4 plus grands mathématiciens de ce début de XIX^e siècle (Cauchy, Lagrange, Laplace, Gauss), avaient été devancés. Un amateur, né à Genève et libraire à Paris, était l'auteur d'un pas décisif. Jean-Robert Argand (1768–1822) avait publié en 1806 un « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques », passé totalement inaperçu. Il faut dire que non content d'être inconnu du milieu mathématique parisien, l'auteur n'avait pas signé. En 1813, Jacques-Frédéric Français publie « Nouveaux principes de Géométrie de position et interprétation géométrique des symboles imaginaires ». À la fin de l'article, il reconnaît honnêtement avoir trouvé ces idées dans une lettre de Legendre à son frère décédé, citant un mémoire anonyme. Une discussion s'engage dans le cadre des Annales de mathématiques pures et appliquées ; Argand se fait connaître, publie un résumé de son

mémoire de 1806, puis en 1814 « Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse ». Ce « théorème d'analyse » est le théorème fondamental de l'algèbre, et la démonstration d'Argand commence par interpréter un polynôme comme une transformation géométrique du plan complexe ; l'enjeu consiste alors à montrer que cette transformation est surjective. Pour la première fois, le théorème est énoncé en toute généralité (pour des polynômes à coefficients complexes), et si certaines justifications laissent encore à désirer, il est tout à fait possible avec les outils d'analyse actuels d'en tirer une démonstration rigoureuse. L'interprétation géométrique des opérations dans $\mathbb{C}$ était promise à un bel avenir. La méthode est définitivement consacrée par Cauchy en 1847.

Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai géométriques.

Cauchy attribue à Argand l'idée que « $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité ». Pourtant, Argand n'est toujours pas le premier.

Né en 1745 près d'Oslo, Caspar Wessel a fait ses études à Copenhague². Ayant obtenu un emploi de l'Académie des Sciences pour travailler sur la cartographie et le cadastre du Danemark, il y passa toute sa vie. Son frère connu comme poète, le décrit ainsi.

Il dresse des cartes en étudiant la loi
Aussi travailleur que je suis paresseux, moi.

Il est l'auteur d'un unique mémoire, présenté à l'Académie des Sciences du Danemark en 1797 : « Om directionens analytiske belegning ». Écrit en danois, ce travail n'avait aucune chance d'être remarqué de Gauss ou Laplace ; il fut oublié des danois et des norvégiens eux-mêmes. Redécouvert et traduit un siècle plus tard, on s'aperçut qu'il décrivait tout à fait clairement la vision géométrique du plan complexe redécouverte plus tard par Argand, et abondamment utilisée depuis.

En publiant, l'un de manière anonyme, l'autre en danois, Argand et Wessel n'avaient pas assuré leur place dans l'Histoire. Mais il eut pire. Pierre-Marie-François Daviet de Foncenex, sujet du royaume du Piémont était un savoyard né à Thonon en 1734. En 1759 alors cadet à l'école d'artillerie de Turin, il publie aux commentaires de l'académie de Turin un article philosophico-mathématique dans lequel il croît bon de critiquer les travaux d'Euler³.

On rencontre si souvent des quantités imaginaires dans les expressions algébriques qu'il serait à souhaiter qu'on se fût attaché à en examiner avec plus de soin la nature et l'origine.

2. V. Brun : Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes, *Revue d'Histoire des Sciences et leurs applications* 12(1) p. 19–24 (1959)

3. J. Dhombres : Rhétorique et algèbre au temps des lumières. La question de la nature des quantités imaginaires selon Euler, Daviet de Foncenex, et Laplace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 64(3) p.273–298 (2006)

[...]

Si on réfléchit sur la nature des racines imaginaires, qui comme on sait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de construction Géométrique possible, puisqu'il n'est point de manière de les considérer, qui lève la contradiction qui se trouve entre les données immuables par elles-mêmes.

Voilà ce qui s'appelle manquer de puissance visionnaire. Après son décès en 1799, le pauvre Foncenex fut accablé par la postérité. Voici le début de la notice qui lui est consacrée dans la « Biographie universelle ancienne et moderne, ouvrage entièrement neuf rédigé par une société de gens de lettres et de savants », parue en 1816.

FONCENET (FRANÇOIS DAVIET DE), Géomètre, naquit en 1734 à Thonon, petite ville de la Savoie, et non pas en Piémont, comme quelques auteurs l'ont imprimé. Son père, à qui la littérature et la philosophie n'étaient pas étrangères, le fit passer de bonne heure à Turin. Il y reçut des leçons du célèbre Lagrange; et la manière dont il en profita, changea bientôt le disciple en véritable ami du maître. Foncenet [sic] fut admis à l'académie des sciences de Turin en 1778. Il y présenta, sur l'analyse algébrique, sur les principes généraux de la mécanique et sur l'analyse transcendante, plusieurs savants Mémoires qui lui donnèrent une place distinguée parmi les géomètres. Malheureusement pour lui, sa réputation vient d'être presque entièrement détruite par quelques révélations échappées à Lagrange dans ses derniers jours. Il paraît que ce grand génie, aussi généreux que fécond, dans l'intention d'obliger un ami, père de famille, fournissait à Foncenet la partie analytique de ses Mémoires, en lui laissant le soin de développer les raisonnements sur lesquels portaient les formules. Ces Mémoires n'ont jamais paru sous le nom de Lagrange; mais on y remarque cette marche analytique qui, depuis, a fait le caractère de ses plus belles productions.

Comment affronter l'Histoire avec un tel handicap?

3.2 Le calcul des résidus

Ne croyez pas qu'une théorie comme celle des fonctions d'une variable complexe sorte un beau jour de la tête d'un mathématicien sous sa forme définitive. Elle est l'aboutissement d'un long processus de maturation, qui se nourrit le plus souvent des tâtonnements et des échanges de plusieurs contributeurs.

De 1814 jusqu'aux années 1840 où commencent à émerger les hypothèses les plus générales, en passant par son monumental « Mémoire de Turin » de 1831, Cauchy élabore quasiment seul sa théorie des fonctions d'une variable complexe. Elle émerge au fil de nombreux « Mémoires sur les intégrales définies » dont il est intéressant de suivre le fil tout au long des années. L'adhésion de ses collègues est loin d'être immédiate. Voici ce qu'écrivit Denis Poisson à propos du mémoire de 1814.

[...] il semble que l'équation (1) et celles qui s'en déduisent devraient déterminer quelques intégrales nouvelles ; mais parmi les nombreux exemples que l'auteur a rassemblés dans la première partie de son Mémoire, je n'ai remarqué aucune intégrale qui ne fût pas déjà connue, ce qui tient sans doute à ce que son procédé, quoique très général et très uniforme, n'est pas essentiellement distinct de ceux qu'on a employés jusqu'ici.

[...]

Ce que le mémoire dont nous rendons compte contient, selon nous, de plus curieux, c'est l'usage que l'auteur fait des intégrales qu'il nomme *singulières*, pour exprimer d'autres intégrales prises entre des limites finies. Il parvient ainsi à plusieurs résultats déjà connus. Cette manière indirecte de les obtenir ne doit pas être préférée aux méthodes ordinaires, mais elle n'est pas moins très remarquable, et digne de l'attention des géomètres.

Le moins qu'on puisse dire est que Poisson ne fait pas preuve d'un enthousiasme excessif pour saluer la naissance de la méthode des résidus. Il faut dire qu'elle n'en était qu'à ses balbutiements : il ne s'agissait encore pour Cauchy que d'exprimer que l'intégrale d'une fonction sur le bord d'un rectangle du plan complexe est nulle, sous des conditions encore assez peu claires, mais qui allaient s'affiner au fil des mémoires suivants. Peut-être Cauchy pensait-il au rapport mitigé de Poisson, en écrivant son « Mémoire sur les intégrales définies où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres ». Il est publié aux Annales de Mathématiques en deux parties ; la seconde, datée de 1826 et consacrée aux applications, contient rien moins que 190 formules intégrales obtenues par la méthode des résidus !

Êtes-vous curieux de savoir à quoi ressemblait la théorème des résidus à sa naissance ? Le voici énoncé en 1822 dans le « Mémoire sur les intégrales définies où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires que peuvent comporter les valeurs de ces mêmes intégrales quand elles deviennent indéterminées ».

Si l'on désigne par $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ les racines de l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = 0 ,$$

dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites x', x'' , et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites y', y'' , et par $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ les véritables valeurs des produits $kf(x_0 + k), kf(x_1 + k), \dots, kf(x_{n-1} + k)$,

correspondantes à $k = 0$, on aura

$$\begin{aligned} & \int_{x'}^{x''} [f(x + y'\sqrt{-1}) - f(x + y''\sqrt{-1})] dx \\ &= \sqrt{-1} \int_{y'}^{y''} [f(x' + y\sqrt{-1}) - f(x'' + y\sqrt{-1})] dy \\ & \quad - 2\pi\sqrt{-1} (f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1}) . \end{aligned}$$

Et maintenant à vous de jouer !

1. Quelle définition Cauchy donne-t-il des pôles ?
2. Comment définiriez-vous rigoureusement les « valeurs véritables des produits. . . »
3. De quel théorème du cours l'énoncé de Cauchy est-il un cas particulier ?
4. Sur quel chemin fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, l'intégrale est-elle prise ?
5. Comment l'énoncé de Cauchy s'écrirait-il en notations modernes ?

3.3 La mémoire des Mémoires

Sept cent quatre-vingt neuf ! c'est le nombre astronomique des divers mémoires, rapports ou notes légués par Cauchy (sans compter les livres de cours et d'exercices divers). En voici la répartition par sujet, en ne comptant pas ceux qui font double emploi.

Arithmétique, théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. – Résidus	81
Fonctions symétriques. – Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	72

La masse ne pouvait qu'impressionner ses contemporains et lui assurer pour la postérité une stature comparable à celles de Gauss et Euler. De fait, quand C.A. Valson, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, publie en 2 volumes « La vie et les travaux du Baron Cauchy », il est souvent plus proche de l'hagiographie que de la biographie scientifique. Il n'empêche, cet ouvrage magistral souvent cité par la suite, installe définitivement Cauchy au panthéon des sciences françaises. En 1870, Joseph

Bertrand rend compte de la biographie de Valson dans le « Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques ». Son appréciation est plus nuancée ; peut-être aussi est-elle plus proche de la vérité⁴ ?

Cauchy, dans son premier Mémoire, montrait d'éminentes qualités devenues chez lui de plus en plus rares. La forme est aussi excellente que le fond, et la rigueur des raisonnements semble s'allier sans effort à la plus lumineuse clarté. Les deux Mémoires de 1811 et de 1812, sur la théorie des polyèdres et les premières études sur le nombre des valeurs d'une fonction montrent que Cauchy, en arrêtant plus longtemps son esprit sur chacune de ses découvertes, aurait pu, s'il l'eût voulu, leur imprimer ce cachet de perfection définitive que trop souvent depuis, il n'a pas eu le loisir de chercher. C'est par sa grande hâte de produire que Cauchy a été si loin de mériter l'éloge que lui décerne cependant M. Valson :

« Il ne quittait pas un sujet avant de l'avoir complètement approfondi et élucidé, de manière à satisfaire les exigences des esprits les plus difficiles. » S'il est un nom illustre dans l'histoire de la science, auquel cette louange ne soit pas applicable, c'est, sans contredit, celui de Cauchy, et, lorsque l'on peut louer en lui tant de rares et exceptionnels mérites, c'est un tort véritable envers sa mémoire de citer précisément celui qui, de l'aveu de tous et évidemment par sa faute, lui a complètement fait défaut.

[...]

Le génie de Cauchy est digne de tous nos respects ; mais pourquoi s'abstenir de rappeler que la trop grande abondance de ses travaux, en diminuant souvent leur précision, en a plus d'une fois caché la force ? La dangereuse facilité d'une publicité immédiate a été pour Cauchy une tentation irrésistible et souvent un écueil. Son esprit, toujours en mouvement, apportait chaque semaine à l'Académie ses travaux à peine ébauchés, des projets de Mémoire et des tentatives infructueuses, et, lors même qu'une brillante découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir. Prenons pour exemple la théorie des substitutions et du nombre de valeurs d'une fonction. À qui doit-elle ses plus grands progrès ? À Cauchy sans aucun doute, et il est véritable que son nom, dans l'histoire de cette belle question, s'élève à une grande hauteur au-dessus de tous les autres. Mais, sur cette théorie qui lui doit tant, Cauchy a composé plus de vingt Mémoires. Deux d'entre eux sont des chefs-d'œuvre. Que dire des dix-huit autres ? rien, sinon que l'auteur y cherche une voie nouvelle, la suit quelque temps, entrevoit la lumière, s'efforce inutilement de l'atteindre, et quitte enfin, sans marquer aucun embarras, les avenues de l'édifice qu'il renonce à

4. J. Bertrand : Revue bibliographique *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 1, p. 103–124 (1870)

construire.

[...]

Les habitués de l'Académie des Sciences n'ont pas oublié avec quelle ardeur, pendant plusieurs semaines, Cauchy, préoccupé de cette question et toujours plein d'espoir, apportait à chaque séance des principes nouveaux entrevus la veille et dont il n'avait pu encore pénétrer toutes les suites. Combien de fois, dans son empressement, l'ont-ils vu déposer sur le bureau le titre d'un Mémoire inachevé qu'il envoyait à l'imprimerie à la dernière heure, en achetant la chance d'antidater de quelques jours une découverte importante par la certitude d'attacher son grand nom à un travail hâtif et imparfait ? De tels souvenirs sont caractéristiques ; ils ne prouvent nullement qu'inférieur à lui-même Cauchy fût quelque-fois abandonné de sa rare perspicacité : l'appréciation serait très injuste. Cauchy, pendant toute sa carrière, a conservé, avec la rapidité de la pensée, la même puissance d'invention et de pénétration. Son génie toujours prêt le rendait maître en peu d'instantes des plus difficiles problèmes. Mais toute recherche exige des tâtonnements et des essais infructueux, que Lagrange, Jacobi et Gauss ont connus sans aucun doute tout autant que lui. Ce qui distingue Cauchy, dont le génie a égalé le leur, c'est d'en avoir longuement et minutieusement informé le public.

[...]

L'admiration de M. Valson pour l'illustre géomètre est absolue et sans réserve, et l'absence, peut-être volontaire, de toute critique, diminue à mes yeux, je l'avoue, le mérite considérable pourtant d'un travail où s'allie, à une science très exacte, un esprit méthodique et soigneux. Cauchy, dit M. Valson, était un éminent professeur ; la louange est méritée, mais, si l'on veut la développer, il ne faut pas, à l'exemple du savant auteur, énumérer sans en omettre un seul, tous les mérites de méthode et de diction, qu'un maître plein de zèle puisse unir à la science la plus profonde, pour les attribuer sans distinction à Cauchy.

[...]

Tout cela est strictement vrai, il est juste et bon de le dire ; mais ces louanges s'adressent au savant éminent bien plus qu'au professeur habile, et, s'il m'est permis d'en juger par les leçons que j'ai entendues à une époque où l'illustre maître avait conservé toute la vigueur de son talent, l'enseignement de Cauchy, si précieux pour les vrais géomètres, n'était nullement fait pour instruire et surtout pour développer les esprits ordinaires. Lorsqu'en 1849, aux applaudissements de tous les amis de la science, Cauchy fut appelé à occuper à la Faculté des Sciences de Paris la chaire de Mécanique céleste, ses premières leçons, il faut l'avouer, trompèrent complètement l'espoir d'un public d'élite plus surpris que charmé par la variété un peu confuse des sujets abordés. La troisième, il m'en souvient, fut presque entièrement

consacrée à l'extraction de la racine carrée, et, le nombre 17 étant pris pour exemple, les calculs furent poussés jusqu'à la dixième décimale par des méthodes connues de tous les auditeurs, et que Cauchy croyait nouvelles parce que la veille sans doute elles avaient spontanément traversé son esprit. Je ne revins plus et j'eus grand tort, car les leçons suivantes m'auraient initié dix ans plus tôt aux plus brillantes découvertes de l'illustre maître. Me contestera-t-on le droit d'ajouter que je n'aurais pas à exprimer un tel regret, si à ses éminentes qualités comme géomètre Cauchy avait ajouté le talent et l'art du professeur ?

3.4 Le rossignol et les chenilles

Même brillant, jouissant de l'estime des meilleurs mathématiciens du moment, il n'est apparemment pas évident de se considérer reconnu à sa juste valeur. Voyez Joseph Liouville (1809–1882)^{5 6}. Quand en 1859 Briot et Bouquet publient une « Théorie des fonctions elliptiques », ils prennent bien soin d'en reconnaître à Liouville la paternité.

Nous devons rappeler que M. Liouville a exposé, dans un cours professé au Collège de France, une théorie des fonctions elliptiques basée sur la considération de la double périodicité. Le programme de ce cours a été publié dans les *Comptes-Rendus* de 1851. Les savantes leçons de l'illustre géomètre, et les beaux travaux de M. Hermite sur le même sujet, ont été le point de départ de nos propres recherches.

Malgré cet hommage, Liouville enrage de n'avoir pas été le premier à publier sa théorie. Dans ses cahiers, il traite Biot et Bouquet de « vils voleurs, mais très dignes jésuites. Élus comme voleurs par l'académie!!!! » ; et d'ajouter une citation de Voltaire : « On dit qu'il faut qu'il y ait des chenilles, parce que les rossignols les mangent, pour mieux chanter ».

Liouville avait vécu quelques années auparavant une expérience douloureuse, lors d'une candidature au Collège de France. Guillaume Libri, meilleur communicateur que mathématicien, avait réussi à mystifier le milieu scientifique, au point d'être préféré à Cauchy et Liouville par les professeurs du Collège, en partie pour des raisons politiques. Il faut dire que la plupart ignoraient tout de son « charlatanisme », et personne ne pouvait encore savoir que Libri, utilisant ses fonctions d'Inspecteur des bibliothèques publiques, finirait par être condamné pour vol. « Je suis profondément humilié, comme homme et comme géomètre, de qui s'est passé hier au Collège de France » enrage Liouville.

Liouville a laissé dans l'histoire des mathématiques une trace plus profonde que Libri ; par ses travaux bien sûr, en particulier sur les fonctions d'une variable complexe, mais

5. J. Peiffer : Joseph Liouville (1809–1882) : ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Revue d'histoire des sciences* 36(3-4) p.209–248 (1983)

6. B. Belhoste, J. Lützen : Joseph Liouville et le collège de France *Revue d'histoire des sciences* 37(3-4) p.255–304 (1984)

aussi par l'influence qu'il a exercée sur ses étudiants. L'un d'eux écrit :

M. Liouville a été un des plus brillants professeurs qu'on ait jamais entendus. Ses leçons ont si vivement frappé ma jeunesse, qu'aujourd'hui encore je garde un vif souvenir de la saisissante clarté qui était son apanage. Aussi, quand plus tard j'ai eu le bonheur de l'entendre parler à l'Institut, n'étais-je pas trop surpris de l'effet que sa parole produisait sur nos confrères, émerveillés d'avoir pu un instant pénétrer, à sa suite, les questions les plus difficiles de la haute analyse.

3.5 La reconnaissance posthume de Laurent

Il a effectivement introduit en 1843 les séries qui portent son nom, même s'il semble que Weierstrass ait pu en avoir l'idée dès 1841 ; mais on trouve finalement assez peu de renseignements fiables sur Pierre-Alphonse Laurent (1813–1854). Voici, inséré dans le compte-rendu de la séance du 19 mars 1855 de l'Académie des Sciences, le début du « Rapport sur deux Mémoires de M. Pierre-Alphonse Laurent, chef de bataillon du génie ; par M. Augustin Cauchy ».

Un homme d'un mérite supérieur, M. Pierre-Alphonse Laurent, a été enlevé, par une mort prématurée, à sa patrie qu'il servait avec ardeur, à la science qu'il enrichissait de ses découvertes. Dès l'année 1843, il composait, sur le calcul des variations, un Mémoire que l'Académie a jugé digne d'être approuvé par elle, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers* ; la même année, au mois d'août, M. Laurent présentait à l'Académie un second Mémoire qu'il intitulait modestement : *Extension d'un théorème de M. Cauchy*. Mais comme il est dit dans le rapport, cette extension constitue un nouveau théorème, digne de remarque, qui peut être utilement employé dans les recherches de haute analyse. Aussi l'Académie a-t-elle adopté les conclusions du Rapport qui signalait ce nouveau Mémoire comme très-digne d'être approuvé par elle et inséré encore dans le *Recueil des Savants étrangers*. Depuis ce moment, M. Laurent, travailleur infatigable, a su, par de constants efforts, conserver dans l'estime des savants le rang si honorable où ses premiers travaux l'avaient placé, et chaque année il a fait parvenir à l'Académie un très-grand nombre de Mémoires sur l'analyse, sur la physique mathématique et particulièrement sur la théorie de la lumière. Enfin, deux importants mémoires du même auteur, présentés, au nom de sa veuve, à l'Académie par M. le Maréchal Vaillant, ne peuvent qu'augmenter les regrets des amis de la science, en leur faisant voir tout ce qu'on devait encore attendre d'un savant distingué, dont la vie a certainement été abrégée par ses nombreuses veilles.

3.6 Fonction zéta et nombres premiers

La « fonction zéta de Riemann » nous vient en fait d'Euler. Il s'agit de la fonction qui à un exposant s associe :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La détermination de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, puis dans la foulée de $\zeta(2n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est un des exploits dont Euler était le plus fier. Il ne s'était pas arrêté là. Il avait aussi compris le rapport des séries de ce type avec les nombres premiers. Voici la traduction du théorème 7 de « *Variae observationes circa series infinitas* » paru aux commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en 1744 (le travail date de 1737).

THÉORÈME 7. Si nous poussons jusqu'à l'infini la continuation des fractions

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdots}$$

dont les numérateurs sont tous les entiers premiers et les dénominateurs sont les mêmes moins une unité, le résultat est le même que la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

qui est certainement infinie.

La « démonstration » est un concentré d'audace eulérienne.

DÉMONSTRATION : Si nous avons

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots,$$

alors nous aurons

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

qui soustraite de la première nous donnera

$$\frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

série où aucun dénominateur n'est pair. De celle-là, nous soustrayons encore la série suivante

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots;$$

et nous aurons

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots,$$

où parmi les dénominateurs nous n'en trouvons aucun divisible soit par 2 soit par 3. Afin d'ôter les nombres divisibles par 5, nous soustrayons la série suivante.

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5} x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \dots$$

et nous aurons

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Et procédant de la même manière, soustrayant tous les termes divisibles d'abord par 7, puis par 11, puis par tous les nombres premiers, nous aurons finalement

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22 \dots}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \dots} x = 1.$$

Puisque

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots,$$

nous avons

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \dots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22 \dots},$$

expression dont les numérateurs constituent la suite des nombres premiers et les dénominateurs sont les mêmes moins une unité. Q. E. D.

Dans le théorème 8 Euler généralise avec le même type d'argument, mais cette fois ci les valeurs sont finies.

THÉORÈME 8. L'expression formée à partir de la suite des nombres premiers

$$\frac{2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 7^n \cdot 11^n \dots}{(2^n - 1)(3^n - 1)(5^n - 1)(7^n - 1)(11^n - 1) \dots}$$

a la même valeur que la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \dots$$

Bon, assez ri ! Vous n'êtes pas Euler, et vous en savez assez pour démontrer *rigoureusement* le résultat suivant.

Théorème 28. Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 1\}$. La fonction qui à $s \in D$ associe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est holomorphe sur D . Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Pour tout $s \in D$, le produit

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

est convergent et égal à $\zeta(s)$.

Au fait, pourquoi Euler avait-il commencé dans son mémoire par le cas $n = 1$? Les corollaires de son théorème 7 montrent ce qu'il avait derrière la tête.

COROLLAIRE 1. Ainsi la valeur de l'expression

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \dots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \dots}$$

est infinie et si nous notons l'infinité absolue ∞ , la valeur de cette expression est $l\infty$ qui est le minimum parmi toutes les puissances de l'infini.

(Euler veut parler de $\ln(+\infty)$, vous l'aurez compris !) Dans la foulée, il revisite le théorème d'Euclide.

COROLLAIRE 2. Comme l'expression

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49 \dots}{3 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 24 \cdot 35 \cdot 48 \dots}$$

a une valeur finie qui est 2, il s'ensuit que les nombres premiers sont infiniment plus nombreux que les carrés dans la suite de tous les nombres.

D'accord, il y a une infinité de nombres premiers, mais quelle infinité ?

COROLLAIRE 3. Également à partir de là, il est également vrai que les nombres premiers sont infiniment moins nombreux que les nombres entiers, puisque l'expression

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots}$$

est infinie, et que la valeur analogue pour des nombres premiers est le logarithme de cette valeur.

Comparez avec son théorème 19.

THÉORÈME 19. La somme des réciproques des nombres premiers,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

est infinie, mais elle est infiniment moindre que la somme de la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

car la première est comme le logarithme de la seconde.

Le « théorème de raréfaction des nombres premiers », pressenti par Euler, n'a été correctement conjecturé (par Gauss et Legendre) qu'à la fin du XVIII^e, et démontré rigoureusement (par Hadamard et de la Vallée Poussin) qu'à la fin du XIX^e.

Théorème 29. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, soit $\pi(x)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = 1 .$$

Entre les deux, un petit mémoire de 8 pages, présenté par Bernhard Riemann (1826–1866) pour son admission comme correspondant à l’Académie de Berlin en 1859, avait révolutionné la question, et donné du grain à moudre aux générations suivantes : « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée ». L’idée de génie de Riemann était d’avoir prolongé la fonction zéta en une fonction méromorphe dans tous le plan complexe, avec un pôle unique en 1, et d’avoir donné une formule *exacte* reliant $\pi(x)$ aux zéros de la fonction zéta ainsi prolongée⁷. Dans le cours de sa démonstration, il était amené à utiliser le fait que les zéros de la fonction zéta, autres que les entiers négatifs pairs, sont *tous de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$* ; et Riemann d’ajouter incidemment :

Il serait à désirer, sans doute, que l’on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j’ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue dans le but de notre étude.

En 2004 Gourdon et Demichel ont calculé dix mille milliards de zéros de la fonction zéta ; ils sont tous de partie réelle $\frac{1}{2}$. Personne ne doute vraiment que l’« hypothèse de Riemann » soit exacte, mais elle n’est toujours pas démontrée. André Weil (1906–1998) a dit :

Quand j’étais jeune, j’espérais démontrer l’hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j’ai encore eu l’espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l’hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d’apprendre qu’il en existe une démonstration.

Le problème est inclus dans la liste des « problèmes du millénaire » et une prime d’un million de dollars est offert à celui qui trouvera la solution. Alors vous qui êtes jeunes. . .

7. G. Lachaud : l’hypothèse de Riemann, *La Recherche* 346, P. 24–30 (2001)