

Intégrales convergentes

La plupart des intégrales que vous rencontrerez ne sont pas des aires de domaines bornés du plan. Nous allons apprendre ici à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini, soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle. Pour assimiler ce chapitre, vous avez juste besoin d'une petite révision des techniques de calcul des primitives, et d'une bonne compréhension de la notion de limite.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Définitions et propriétés	1
1.2	Fonctions positives, intervalle non borné	5
1.3	Fonctions positives, intervalle borné	8
1.4	Fonctions oscillantes, intervalle non borné	11
1.5	Fonctions oscillantes, intervalle borné	14
1.6	Plan d'étude	15
1.7	Exemples	17
2	Entraînement	19
2.1	Vrai ou faux	19
2.2	Exercices	22
2.3	QCM	26
2.4	Devoir	28
2.5	Corrigé du devoir	31
3	Compléments	37
3.1	La pédagogie des sourds-muets	37
3.2	Un tour de passe-passe d'Euler	37
3.3	La courbe de Gauss	38

1 Cours

1.1 Définitions et propriétés

Notre but dans ce chapitre est de calculer des intégrales sur des intervalles non bornés (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), ou bien des intégrales sur un domaine borné, de fonctions ayant une limite infinie en un point de l'intervalle d'intégration. Si on se réfère à l'interprétation intuitive d'une intégrale comme la surface d'un domaine dans le plan, dans les deux cas nous cherchons à calculer des surfaces de domaines *non bornés*.

Considérons par exemple la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}^*$ associe $f(t) = |t|^{-3/2} \sin(t)$: son graphe est représenté sur la figure 1. Comment donner un sens à l'intégrale de f

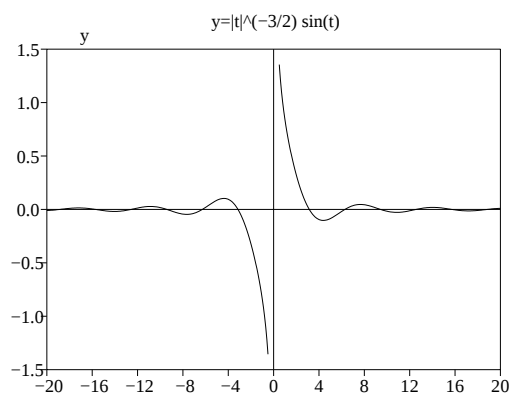


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $t \mapsto |t|^{-3/2} \sin(t)$.

sur $\mathbb{R}$? Nous souhaitons une définition qui respecte les propriétés de base que sont la relation de Chasles, la linéarité et la monotonie.

On commence d'abord par identifier les *points incertains*, soit $\pm\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée ($t = 0$ dans notre exemple). On découpe ensuite l'intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point incertain, placé à l'une des deux bornes. La relation de Chasles impose que l'intégrale sur l'intervalle complet soit la somme des intégrales sur les intervalles du découpage. Dans l'exemple de la fonction $f(t) = |t|^{-3/2} \sin(t)$ ci-dessus, il faut découper en 4 sous-intervalles : 2 pour isoler $-\infty$ et $+\infty$, et 2 autres pour le point incertain 0. On pourra écrire par exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt .$$

Le seul but est d'isoler les difficultés : les choix de -1 et 1 comme points de découpage sont arbitraires (par exemple -3 et 10 auraient convenu tout aussi bien).

Par ce découpage, on se ramène à des intégrales de 4 types.

1. intégrale sur $] -\infty, a]$,
2. intégrale sur $[a, +\infty[$,
3. intégrale sur $]a, b]$, fonction non bornée en a ,
4. intégrale sur $[a, b[$, fonction non bornée en b ,

Le changement de variable $t \mapsto -t$ permet de réduire ces 4 cas à 2 seulement. En effet :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-u) du ,$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-b}^{-a} f(-u) du .$$

Nous devons donc définir l'intégrale dans deux cas distincts.

Définition 1.

1. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si la limite quand x tend vers $+\infty$ de la primitive $\int_a^x f(t) dt$ existe. Si c'est le cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt . \quad (1)$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

2. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si la limite à droite quand x tend vers a de $\int_x^b f(t) dt$ existe. Si c'est le cas, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt . \quad (2)$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

Observons que la deuxième définition est cohérente avec les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue : si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tout entier, alors $\int_x^b f(t) dt$ est une fonction de x continue en a , et (2) est vérifié.

Dans $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, la borne de gauche de l'intervalle d'intégration n'a pas d'influence sur le comportement de l'intégrale. Supposons f continue sur $[a, +\infty[$ et choisissons un réel $a' > a$. Par la relation de Chasles,

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt + \int_{a'}^x f(t) dt$$

Comme $\int_a^{a'} f(t) dt$ ne dépend pas de x , la limite de $\int_a^x f(t) dt$ existe si et seulement si celle de $\int_{a'}^x f(t) dt$ existe aussi. La convergence d'une intégrale ne dépend donc pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de $+\infty$.

Si f n'est pas bornée au voisinage de a , la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas de b , pour la même raison : elle ne dépend que du comportement de f au voisinage de a .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la linéarité des intégrales et des limites.

Proposition 1.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, et α, β deux réels. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t) dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t) dt .$$

2. Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$, et α, β deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt$ converge et

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt .$$

Quand on peut calculer une primitive de la fonction à intégrer, l'étude de la convergence se ramène à un calcul de limite. Voici plusieurs exemples.

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ converge.}$$

En effet,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^x = \arctan(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} .$$

On pourra écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} ,$$

à condition de se souvenir que $\left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty}$ désigne une limite en $+\infty$.

Par contre, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt \text{ diverge.}$$

En effet,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_0^x = \ln(1+x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty .$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge.}$$

En effet,

$$\int_x^1 \ln(t) dt = \left[t \ln(t) - t \right]_x^1 = x - x \ln(x) - 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln(x) - 1) = -1$$

On pourra écrire :

$$\int_0^1 \ln(t) dt = \left[t \ln(t) - t \right]_0^1 = -1 .$$

Par contre, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ diverge.}$$

En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = \left[\ln(t) \right]_x^1 = -\ln(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = +\infty .$$

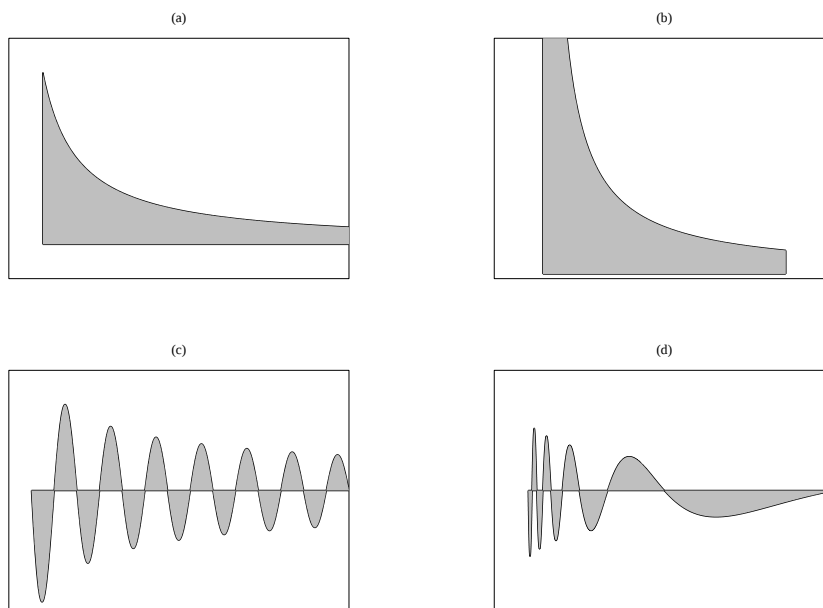


FIGURE 2 – Différents types d'intégrales : (a) intervalle non borné, fonction de signe constant ; (b) intervalle borné, fonction de signe constant ; (c) intervalle non borné, fonction de signe non constant ; (d) intervalle borné, fonction de signe non constant.

Quand on ne sait pas calculer une primitive, on a recours à deux types de méthodes, selon que la fonction est ou non de signe constant au voisinage du point incertain. Il y a donc 4 cas distincts, selon le type du point incertain, et le signe, constant ou non, de la fonction à intégrer. Ces 4 types sont schématisés dans la figure 2 et leur étude fait l'objet des sections suivantes.

1.2 Fonctions positives, intervalle non borné

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, où f est de signe constant au voisinage de $+\infty$. Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f s'il est négatif, nous pouvons supposer que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $[a, +\infty[$ (figure 3). Rappelons que par définition,

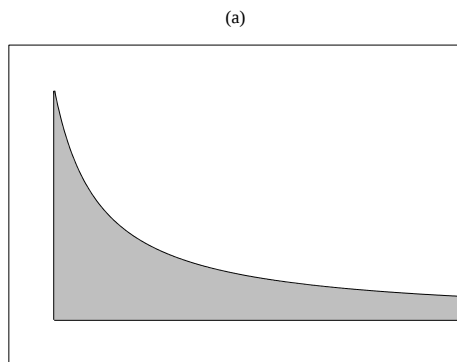


FIGURE 3 – Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle non borné.

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt .$$

Observons que si la fonction f est positive, alors la primitive $\int_a^x f(t) dt$ est une fonction croissante de x (car sa dérivée est $f(x)$). Quand x tend vers l'infini, soit $\int_a^x f(t) dt$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, soit $\int_a^x f(t) dt$ tend vers $+\infty$.

Si on ne peut pas (ou si on ne veut pas) calculer une primitive de f , on étudie la convergence en comparant avec des intégrales dont la convergence est connue, grâce au théorème suivant.

Théorème 1. Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, +\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$:

$$\exists A, \forall t > A, \quad f(t) \leq g(t) .$$

- Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Démonstration : Comme nous l'avons observé, la convergence des intégrales ne dépend pas de la borne de gauche de l'intervalle, et nous pouvons nous contenter d'étudier $\int_A^x f(t) dt$ et $\int_A^x g(t) dt$. Or en utilisant la monotonie des intégrales, on obtient que pour tout $x > A$:

$$\int_A^x f(t) dt \leq \int_A^x g(t) dt .$$

Si $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_A^x f(t) dt$ est une fonction croissante et majorée par $\int_A^{+\infty} g(t) dt$, donc convergente. Inversement, si $\int_A^x f(t) dt$ tend vers $+\infty$, alors $\int_A^x g(t) dt$ tend vers $+\infty$ également. $\square$

Comme application typique du théorème de comparaison des intégrales 1, nous allons montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \text{ converge,}$$

pour tout réel α . Pour cela nous écrivons :

$$t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0,$$

pour tout α (l'exponentielle l'emporte sur les puissances de t). En particulier, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A, t^\alpha e^{-t/2} \leq 1.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A, t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-t/2} dt = \left[-2e^{-t/2} \right]_1^x = 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} = 2e^{-1/2}.$$

On peut donc appliquer le théorème de comparaison 1 : puisque $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge aussi.

Grâce au théorème de comparaison 1, on peut remplacer la fonction à intégrer par un équivalent au voisinage de $+\infty$ pour étudier la convergence d'une intégrale.

Théorème 2. Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$, équivalentes au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Démonstration : Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que le rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall t > A, \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall t > A, \quad (1 - \varepsilon)g(t) < f(t) < (1 + \varepsilon)g(t).$$

Fixons $\varepsilon < 1$, et appliquons le théorème de comparaison 1 sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty} (1 - \varepsilon)g(t) dt$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ aussi par la linéarité (proposition 1).

Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty} (1 + \varepsilon)g(t) dt$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ diverge aussi. $\square$

Par exemple, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt \text{ converge.}$$

En effet,

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t},$$

et nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge.

L'utilisation des équivalents permet ainsi de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, à un catalogue d'intégrales dont la convergence est connue. Les plus classiques sont les intégrales de Riemann et de Bertrand.

Intégrales de Riemann : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$,

où α est un réel strictement positif. Dans ce cas, la primitive est explicite :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha+1} \right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(t) \right]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Riemann.

$$\text{Si } \alpha \leq 1 \quad \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \text{ diverge,}$$

$$\text{si } \alpha > 1 \quad \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \text{ converge.}$$

Intégrales de Bertrand : $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\ln(t))^{-\beta} dt$,

où β est un réel strictement positif. La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} t^{-1} (\ln(t))^{-\beta} dt = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\beta + 1} (\ln(t))^{-\beta+1} \right]_2^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln(t)) \right]_2^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

On en déduit la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Bertrand.

$$\begin{aligned} \text{Si } \beta \leq 1 \quad & \int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} dt \text{ diverge,} \\ \text{si } \beta > 1 \quad & \int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} dt \text{ converge.} \end{aligned}$$

Voici un exemple d'application :

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2 + 3t} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) dt \text{ converge.}$$

Pour le démontrer, calculons un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + 3t} &= t \sqrt{1 + \frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t . \\ \ln \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) \right) &= \ln \left(1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2} . \\ \sin^2 \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) &\underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln(t)} \right)^2 . \end{aligned}$$

D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2 + 3t} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) \right) \sin^2 \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t(\ln(t))^2} .$$

Remarquons que la fonction est négative au voisinage de $+\infty$, ce qui ne change pas la nature de l'intégrale. D'après le théorème 2, l'intégrale proposée est de même nature que l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-2} dt$, donc convergente.

1.3 Fonctions positives, intervalle borné

Nous traitons ici le cas où la fonction à intégrer tend vers l'infini en l'une des bornes de l'intervalle d'intégration. Le traitement est tout à fait analogue au cas précédent.

Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f , nous pouvons supposer que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $]a, b]$, et tend vers $+\infty$ en a (figure 2). Rappelons que par définition,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt .$$

Observons que si la fonction f est positive, alors $\int_x^b f(t) dt$ croît quand x décroît vers a : soit $\int_a^b f(t) dt$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, soit $\int_x^b f(t) dt$ tend vers $+\infty$.

Si on ne peut pas (ou si on ne veut pas) calculer une primitive de f , on étudie la convergence en comparant avec des intégrales dont la convergence est connue, grâce au théorème suivant.

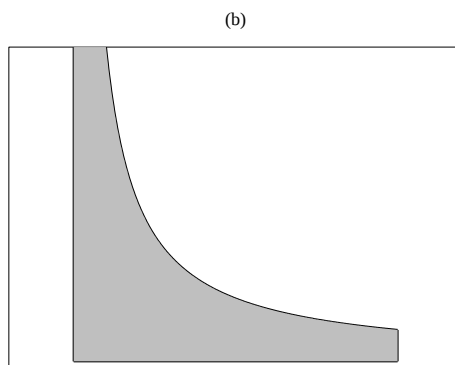


FIGURE 4 – Intégrale d'une fonction positive non bornée.

Théorème 3. Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $]a, b]$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de a :

$$\exists \varepsilon, \forall t \in]a, a + \varepsilon], \quad f(t) \leq g(t) .$$

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Démonstration : Comme nous l'avons observé, la convergence des intégrales ne dépend pas de la borne de droite de l'intervalle, et nous pouvons nous contenter d'étudier $\int_x^{a+\varepsilon} f(t) dt$ et $\int_x^{a+\varepsilon} g(t) dt$. Or en utilisant la monotonie des intégrales, on obtient que pour tout $x \in]a, a + \varepsilon]$:

$$\int_x^{a+\varepsilon} f(t) dt \leq \int_x^{a+\varepsilon} g(t) dt .$$

Si $\int_a^{a+\varepsilon} g(t) dt$ converge, alors $\int_x^{a+\varepsilon} f(t) dt$ croît quand x décroît vers a et est majorée par $\int_a^{a+\varepsilon} g(t) dt$, elle converge donc. Inversement, si $\int_x^{a+\varepsilon} f(t) dt$ tend vers $+\infty$, alors $\int_x^{a+\varepsilon} g(t) dt$ tend vers $+\infty$ également. $\square$

Voici une application typique du théorème de comparaison des intégrales 3. Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^\alpha}{\sqrt{t}} dt \quad \text{converge,}$$

pour tout réel α . Pour cela nous écrivons :

$$\frac{(-\ln(t))^\alpha}{\sqrt{t}} = ((-\ln(t))^\alpha t^{1/4}) t^{-3/4} .$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t)^\alpha t^{1/4} = 0 ,$$

pour tout α (les puissances de t l'emportent sur le logarithme). En particulier, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0, \varepsilon], (-\ln(t))^\alpha t^{1/4} \leq 1.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $t^{-3/4}$ on obtient :

$$\forall t \in]0, \varepsilon], \frac{(-\ln(t))^\alpha}{\sqrt{t}} \leq t^{-3/4}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 t^{-3/4} dt$ converge. En effet :

$$\int_x^1 t^{-3/4} dt = \left[4t^{1/4} \right]_x^1 = 4 - 4x^{1/4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - 4x^{1/4}) = 4.$$

On peut donc appliquer le théorème de comparaison 3 : puisque $\int_0^1 t^{-3/4} dt$ converge, on en déduit que $\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^\alpha}{\sqrt{t}} dt$ converge aussi.

Grâce au théorème de comparaison 3, on peut remplacer la fonction à intégrer par un équivalent au voisinage de a pour étudier la convergence d'une intégrale.

Théorème 4. Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $]a, b]$, équivalentes au voisinage de a :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t) dt$ converge.

Démonstration : Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a , c'est dire que le rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall t \in]a, a + \eta], \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall t \in]a, a + \eta], (1 - \varepsilon)g(t) < f(t) < (1 + \varepsilon)g(t).$$

Fixons $\varepsilon > 0$, et appliquons le théorème de comparaison 3 sur l'intervalle $]a, a + \eta]$. Si l'intégrale $\int_a^{a+\eta} f(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{a+\eta} (1 - \varepsilon)g(t) dt$ converge, donc l'intégrale $\int_a^{a+\eta} g(t) dt$ aussi par la linéarité (proposition 1). Inversement, si $\int_a^{a+\eta} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{a+\eta} (1 + \varepsilon)g(t) dt$ diverge, donc $\int_a^{a+\eta} g(t) dt$ diverge aussi. $\square$

Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{-\ln(t) + 1}{\sin(t)}} dt \text{ converge.}$$

En effet,

$$\sqrt{\frac{-\ln(t) + 1}{\sin(t)}} \underset{0^+}{\sim} \frac{(-\ln(t))^{1/2}}{\sqrt{t}},$$

et nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{1/2}}{\sqrt{t}} dt$ converge.

L'utilisation des équivalents permet ainsi de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, à un catalogue d'intégrales dont la convergence est connue. Les plus classiques sont du type $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$, mais attention, la convergence en fonction du paramètre α est inversée par rapport aux intégrales de Riemann.

$$\text{Si } \alpha < 1 \quad \int_0^1 t^{-\alpha} dt \text{ converge,}$$

$$\text{si } \alpha \geq 1 \quad \int_0^1 t^{-\alpha} dt \text{ diverge.}$$

1.4 Fonctions oscillantes, intervalle non borné

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, où $f(t)$ oscille jusqu'à l'infini entre des valeurs positives et négatives (figure 5). La définition de la convergence reste la même.

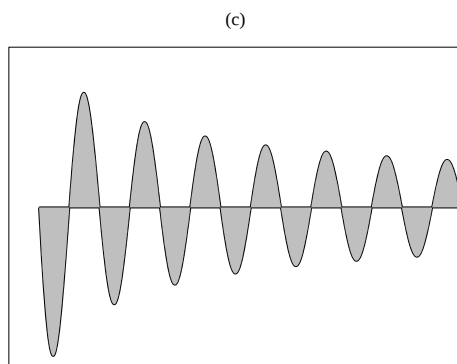


FIGURE 5 – Intégrale d'une fonction oscillante sur un intervalle non borné.

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Contrairement au cas des fonctions positives, où la limite était soit finie, soit égale à $+\infty$, tous les comportements sont possibles ici : les valeurs de $\int_a^x f(t) dt$ peuvent tendre vers une limite finie, vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou bien encore osciller entre deux valeurs finies (comme $\int_a^x \sin(t) dt$), ou s'approcher alternativement de $+\infty$ et $-\infty$ (comme $\int_a^x t \sin(t) dt$).

Le cas le plus favorable est celui où la *valeur absolue* de f converge.

Définition 2. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Le théorème suivant est souvent utilisé pour démontrer la convergence d'une intégrale. Malheureusement, il ne permet pas de calculer la valeur de cette intégrale.

Théorème 5. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : Rappelons la définition : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^x f(t) dt$ converge. Posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Nous allons démontrer que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tendant vers l'infini, la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Par la relation de Chasles, pour tout couple d'entiers (n, m) avec $n < m$:

$$|F(x_m) - F(x_n)| = \left| \int_{x_n}^{x_m} f(t) dt \right| \leq \int_{x_n}^{x_m} |f(t)| dt$$

Or par hypothèse, l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. On en déduit que la suite de terme général $\int_a^{x_n} |f(t)| dt$ converge : c'est donc une suite de Cauchy. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $m > n > n_0$,

$$|F(x_m) - F(x_n)| \leq \int_{x_n}^{x_m} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

La suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge. Puisque c'est vrai pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, la fonction $x \mapsto F(x)$ admet une limite en $+\infty$, d'où le résultat. $\square$

Par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \text{ est absolument convergente,}$$

donc convergente. En effet pour tout t ,

$$\frac{|\sin(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{-2} dt$ est convergente. D'où le résultat par le théorème de comparaison 1. Par contre,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ n'est pas absolument convergente.}$$

Voici un moyen de le vérifier. Comme $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout t , on a :

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - 2\cos(2t)}{2t}.$$

En appliquant une intégration par parties à $\frac{\cos(2t)}{t}$, on obtient :

$$\int_1^x \frac{1 - 2\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(t) \right]_1^x + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{t} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2} dt.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ converge absolument, comme nous venons de le voir. Des 3 termes de la somme ci-dessus, les deux derniers convergent, le premier tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale diverge, et par le théorème de comparaison 1, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge également.

Il se trouve que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

Pour le montrer, effectuons une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

La fonction $\frac{\cos(t)}{t}$ tend vers 0 (car $\cos(t)$ est borné et $\frac{1}{t}$ tend vers 0). Par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, on montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente, donc convergente. Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

Pour montrer qu'une intégrale converge quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant, dit *théorème d'Abel*.

Théorème 6. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t) dt$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt \text{ converge.}$$

Démonstration : C'est une généralisation de l'exemple précédent. Pour tout $x \geq a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t) dt$. Par hypothèse, G est bornée, donc il existe M tel que pour tout x , $|G(x)| \leq M$. Effectuons maintenant une intégration par parties.

$$\int_a^x f(t) g(t) dt = \left[f(t) G(t) \right]_a^x - \int_a^x f'(t) G(t) dt.$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le premier terme converge. Montrons maintenant que le deuxième converge aussi, en vérifiant que

$$\int_a^{+\infty} f'(t) G(t) dt \text{ est absolument convergente.}$$

On a :

$$|f'(t) G(t)| = |f'(t)| |G(t)| \leq (-f'(t)) M,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leq 0$) et $|G|$ est bornée par M . Par le théorème de comparaison 1, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t) dt$ est convergente. Or :

$$\int_a^x -f'(t) dt = f(a) - f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(a) - f(x)) = f(a) .$$

□

Comme exemple d'application, si α est un réel strictement positif, et k un entier positif *impair*, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt \text{ converge.}$$

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$. On vérifie que les hypothèses du théorème 6 sont satisfaites pour $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = \sin^k(t)$. Pour s'assurer que la primitive de $\sin^k$ est bornée, il suffit de penser à une linéarisation, qui transformera $\sin^k(t)$ en une combinaison linéaire des $\sin(ht)$, $h = 1 \dots k$, dont la primitive sera toujours bornée.

1.5 Fonctions oscillantes, intervalle borné

Le dernier cas à traiter est celui où la fonction à intégrer oscille au voisinage d'une des bornes, prenant des valeurs arbitrairement proches de $+\infty$ et $-\infty$ (figure 6). Le

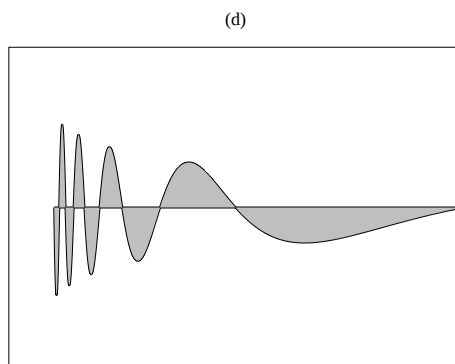


FIGURE 6 – Intégrale d'une fonction positive non bornée.

changement de variable $u = 1/(t - a)$ permet de se ramener au cas précédent, ce qui nous dispensera de donner autant de détails. Rappelons que par définition,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt .$$

La notion importante est toujours la convergence absolue.

Définition 3. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)| dt$ est une intégrale convergente.

Nous admettrons le théorème suivant, qui se démontre de la même façon que le théorème 5.

Théorème 7. Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} dt \text{ est absolument convergente,}$$

donc convergente. En effet pour tout t ,

$$\frac{|\sin(1/t)|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ converge. D'où le résultat par le théorème de comparaison 3. Par contre,

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{t} dt \text{ n'est pas absolument convergente,}$$

mais elle est convergente. Pour le voir, effectuons le changement de variable $t \mapsto 1/u$.

$$\int_x^1 \frac{\sin(1/t)}{t} dt = \int_{1/x}^1 u \sin(u) \frac{-1}{u^2} du = \int_1^{1/x} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente sans être absolument convergente.

On pourrait énoncer un théorème d'Abel analogue au théorème 6, mais cela n'est pas vraiment utile. D'une part les fonctions auxquelles il s'appliquerait se rencontrent rarement, d'autre part, il est en général facile de se ramener à un problème sur $[c, +\infty[$, par le changement de variable $t \mapsto u = 1/(t-a)$: nous l'avons déjà fait pour $\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{t} dt$.

1.6 Plan d'étude

Nous résumons ici l'ensemble des techniques vues dans ce chapitre pour l'étude de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, la fonction étant éventuellement non bornée au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle. Pour illustrer le plan d'étude, nous détaillerons l'exemple introductif :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-3/2} \sin(t) dt.$$

1. Identifier le ou les points incertains

La fonction $|t|^{-3/2} \sin(t)$ est impaire, elle tend vers 0 en oscillant quand t tend vers $-\infty$ et $+\infty$, elle tend vers $-\infty$ en 0^- et vers $+\infty$ en 0^+ (cf. figure 1). Il y a donc 4 points incertains à étudier.

2. Isoler les points incertains

Pour cela, il faut découper l'intervalle d'étude en autant de sous-intervalles qu'il y a de points incertains, de manière à ce que les problèmes soient tous situés sur une borne de chaque intervalle. Dans notre exemple, on divisera en 4 intervalles.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} |t|^{-3/2} \sin(t) dt, \quad I_2 = \int_{-1}^0 |t|^{-3/2} \sin(t) dt,$$

$$I_3 = \int_0^1 |t|^{-3/2} \sin(t) dt, \quad I_4 = \int_1^{+\infty} |t|^{-3/2} \sin(t) dt,$$

Chacune des intégrales obtenues doit être étudiée séparément. L'intégrale I n'est définie que si chacun des morceaux converge.

3. Se ramener à une intégrale sur $[a, +\infty[$ ou sur $]a, b]$

Pour cela, il suffit d'effectuer le changement de variable $t \mapsto -t$. Dans notre cas, puisque la fonction est impaire, $I_1 = I_4$ et $I_2 = I_3$.

4. Calculer une primitive si c'est possible

Ayant une primitive, le problème est ramené à un calcul de limite (définition 1). Si on n'a pas de primitive explicite, alors :

5. Si la fonction est de signe constant

Changer éventuellement le signe pour se ramener à une fonction positive. Calculer un équivalent au voisinage du point incertain et utiliser le théorème 2 ou 4. Si l'équivalent ne donne pas la réponse directement, utiliser le théorème de comparaison 1 ou 3. Dans notre exemple, l'intégrale I_3 est celle d'une fonction positive, tendant vers $+\infty$ en 0^+ .

$$t^{-3/2} \sin(t) \underset{0^+}{\sim} t^{-1/2}.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 t^{-1/2} dt$ converge, donc I_3 converge.

6. Si la fonction n'est pas de signe constant

Commencer par étudier l'intégrale de $|f|$, comme dans le cas précédent (équivalent ou comparaison). Si elle converge, l'intégrale étudiée est absolument convergente, donc convergente. Si l'intégrale n'est pas absolument convergente, il faut essayer de mettre la fonction sous forme d'un produit pour appliquer le théorème d'Abel 6. Dans notre exemple, l'intégrale I_4 est absolument convergente : on le déduit du théorème de comparaison, car

$$t^{-3/2} |\sin(t)| \leq t^{-3/2},$$

et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{-3/2} dt$ est convergente. On pourrait aussi appliquer le théorème d'Abel 6 avec $f(t) = t^{-3/2}$ et $g(t) = \sin(t)$.

1.7 Exemples

Comme exemple d'intégrales dont la primitive est explicitement calculable, observons que l'on peut généraliser les intégrales de Riemann et de Bertrand.

$$\text{Si } \gamma \leq 1 \quad \int_3^{+\infty} t^{-1} (\ln(t))^{-1} (\ln(\ln(t)))^{-\gamma} dt \text{ diverge,}$$

$$\text{si } \gamma > 1 \quad \int_3^{+\infty} t^{-1} (\ln(t))^{-1} (\ln(\ln(t)))^{-\gamma} dt \text{ converge.}$$

Pour des intégrales au voisinage de 0 :

$$\text{Si } \beta \leq 1 \quad \int_0^{1/2} t^{-1} (-\ln(t))^{-\beta} dt \text{ diverge,}$$

$$\text{si } \beta > 1 \quad \int_0^{1/2} t^{-1} (-\ln(t))^{-\beta} dt \text{ converge.}$$

Voici maintenant des applications des théorèmes de comparaison 1 et 3. L'idée intuitive à retenir est la suivante. Quand une fonction est un produit de plusieurs fonctions du type exponentielle, puissances de x , puissances de logarithmes, l'une de ces fonctions "l'emporte" sur les autres : l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x et les puissances de x l'emportent sur le logarithme.

Dans les exemples suivants, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent des réels strictement positifs. Les intégrales suivantes sont convergentes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} t^\beta dt, \quad \int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} t^\beta (\ln(t))^\gamma dt, \quad \int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} t^\beta (\ln(t))^\gamma |\sin(t)|^\delta dt.$$

La démonstration est la même que pour $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$. Nous en rappelons le principe, en le généralisant.

Proposition 2. Soient α et α' deux réels tels que $0 < \alpha' < \alpha$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $e^{-(\alpha-\alpha')t} f(t)$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) dt \text{ est absolument convergente.}$$

Démonstration : Par hypothèse, il existe M tel que pour tout $t > a$,

$$|e^{-(\alpha-\alpha')t} f(t)| \leq M.$$

En multipliant par $e^{-\alpha' t}$, on obtient

$$|e^{-\alpha t} f(t)| \leq e^{-\alpha' t} M.$$

D'où le résultat par le théorème de comparaison 1, puisque $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha' t} dt$ converge. $\square$

Le même raisonnement vaut quand c'est une puissance de t qui est dominante. Par exemple, pour tout $\alpha > 1$ et pour tout β ,

$$\int_2^{+\infty} t^{-\alpha} (\ln(t))^\beta dt \text{ converge.}$$

Proposition 3. Soient α et α' deux réels tels que $1 < \alpha' < \alpha$ et soit f une fonction telle que $t^{-(\alpha-\alpha')}f(t)$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} t^{-\alpha} f(t) \, dt \text{ est absolument convergente.}$$

Démonstration : Par hypothèse, il existe M tel que pour tout $t > a$,

$$|t^{-(\alpha-\alpha')}f(t)| \leq M .$$

En multipliant par $t^{-\alpha'}$, on obtient

$$|t^{-\alpha}f(t)| \leq t^{-\alpha'}M .$$

D'où le résultat par le théorème de comparaison 1, puisque $\int_a^{+\infty} t^{-\alpha'} \, dt$ converge. $\square$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge.
2. ☒ Si l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge, alors son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge.
3. ☒ Si f est une fonction paire, alors son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge si et seulement si son intégrale sur $[1, +\infty[$ converge.
4. ☒ Si l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^+$ converge, alors son intégrale sur $[1, +\infty[$ converge.
5. ☐ Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge.
6. ☐ Si l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge, alors $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
7. ☒ Si $f(x)$ tend vers $l \neq 0$ quand x tend vers $+\infty$, alors son intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge.
8. ☐ Si l'intégrale de f sur $[0, x]$ est une fonction bornée de x , alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
9. ☒ Si f est positive et si l'intégrale de f sur $[0, x]$ est une fonction bornée de x , alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
10. ☐ Si pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
11. ☐ Si f est positive et si pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
12. ☒ Si f est positive et si pour tout $x \geq e$, $f(x) \leq \frac{1}{x(\ln(x))^2}$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
13. ☒ Si f est positive et si pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq x^4$, alors l'intégrale de $e^{-x/2}f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
14. ☐ Si pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq x^4$, alors l'intégrale de $e^{-x/2}f(x)$ sur $\mathbb{R}$ converge.
15. ☒ Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq e^x$, alors l'intégrale de $e^{-x^2}f(x)$ sur $\mathbb{R}$ converge.

Vrai-Faux 2. Soit f une fonction définie et continue sur $]0, 1]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $f(x)$ tend vers $l \neq 0$ quand x tend vers 0, alors son intégrale sur $]0, 1]$ diverge.
2. ☒ Si l'intégrale de f^2 sur $]0, 1]$ converge, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.
3. ☐ Si l'intégrale de f sur $[x, 1]$ est une fonction bornée de x alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.

4. ☒ Si pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) \geq -1$ et si l'intégrale de f sur $[x, 1]$ est une fonction bornée de x alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.
5. ☐ Si l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge, alors l'intégrale de $1/f$ sur $[1, +\infty[$ converge.
6. ☒ L'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge si et seulement si l'intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})$ sur $[1, +\infty[$ converge.
7. ☐ Si pour tout $x \in]0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.
8. ☒ Si pour tout $x \in]0, 1]$, $-2 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.

Vrai-Faux 3. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, alors l'intégrale de $\sin(x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
2. ☒ Si pour tout $x > 1$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, alors l'intégrale de $\sin(x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
3. ☐ Si $f(x)$ est décroissante et si sa limite en $+\infty$ est nulle, alors l'intégrale de $\sin^2(x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
4. ☒ Si $f(x)$ est décroissante et si sa limite en $+\infty$ est nulle, alors l'intégrale de $\sin(2x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
5. ☒ Si l'intégrale de $e^{2ix}f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de $\sin(2x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.
6. ☐ Si l'intégrale de $\sin(2x)f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de $e^{2ix}f(x)$ sur $[0, +\infty[$ converge.

Vrai-Faux 4. Les intégrales suivantes convergent : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☒ $\int_0^\infty \frac{\sin(\frac{1}{t^2})}{\arctan(t)} dt.$
2. ☒ $\int_0^\infty \sqrt{t} \sin^2(\frac{1}{t}) dt.$
3. ☐ $\int_0^\infty \frac{\cos^2(\frac{1}{t})}{t} dt.$
4. ☒ $\int_0^\infty \sqrt{t^4 + 1} e^{-t} dt.$
5. ☒ $\int_0^\infty (e^t + t^4) e^{-t^2} dt.$
6. ☐ $\int_0^\infty (e^t + t^4) e^{-t} dt.$
7. ☒ $\int_0^\infty (e^t + t^4) e^{-2t} dt.$

Vrai-Faux 5. Les intégrales suivantes convergent : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☐ $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\tan^2(t)} dt.$
2. ☒ $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{(\sqrt{\tan(t)})^3} dt.$
3. ☒ $\int_0^1 \frac{\sin^2(t^2)}{t^{\frac{10}{3}}} dt.$
4. ☐ $\int_0^{1/2} \frac{\tan^2(t^3)}{t^7 \ln(\frac{1}{t})} dt.$
5. ☐ $\int_0^{1/2} \frac{\cos^2(t^3)}{t^2 (\ln(\frac{1}{t}))} dt.$
6. ☒ $\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(t^3)}{t^7 (\ln(\frac{1}{t}))^2} dt.$

Vrai-Faux 6. Parmi les intégrales suivantes convergent, mais ne sont pas absolument convergentes : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☒ $\int_1^\infty \frac{\sin^3(t^2)}{t} dt.$
2. ☐ $\int_1^\infty \frac{\sin^2(t^2)}{t} dt.$
3. ☐ $\int_1^\infty \frac{\sin^3(t^2)}{t^2} dt.$
4. ☒ $\int_2^\infty \frac{\sin(t)}{t \ln(t)} dt.$
5. ☒ $\int_2^\infty \frac{\sin(t)}{(\ln(t))^3} dt.$
6. ☐ $\int_2^\infty \frac{\sin^2(t)}{(\ln(t))^3} dt.$
7. ☐ $\int_2^\infty \frac{\sin^2(t)}{(t \ln(t))^3} dt.$

Vrai-Faux 7. Les intégrales suivantes convergent mais ne sont pas absolument convergentes : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☒ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{t^2})}{\arctan(t)} dt.$
2. ☒ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \ln |t - 1| dt.$
3. ☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2 + 2t + 1}} dt.$

$$4. \quad \square \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{|t^2 + 2t - 8|})^3} dt.$$

$$5. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{|t^2 + 2t - 8|}} dt.$$

Vrai-Faux 8. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

$$1. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-|t|} dt = 2.$$

$$2. \quad \square \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 1.$$

$$3. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-|t|} dt = 4.$$

$$4. \quad \square \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t} dt = 1.$$

$$5. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) e^{-|t|} dt = 0.$$

$$6. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2t) e^{-|t|} dt = \frac{2}{5}.$$

$$7. \quad \square \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$8. \quad \boxtimes \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 3} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des fonctions $f : t \mapsto f(t)$ suivantes :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)} \quad ; \quad f(t) = \frac{1}{t(t+1)(t+2)} ;$$

$$f(t) = \frac{1}{t \ln^2(t)} \quad ; \quad f(t) = \frac{1}{t \ln(t)(\ln(\ln(t)))^3} .$$

$$1. \text{ Calculer pour tout } x \geq 1, \int_1^x f(t) dt.$$

$$2. \text{ En déduire } \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions $f : t \mapsto f(t)$ suivantes :

$$f(t) = e^{-t} \cos(t) \quad ; \quad f(t) = e^{-t} \sin(t) ;$$

$$f(t) = te^{-t} \quad ; \quad f(t) = \frac{1}{\cosh(t)} .$$

1. Calculer pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x f(t) dt$.

2. En déduire $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 3. Soit x un réel strictement compris entre 0 et 1.

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{2}{1-t^2} dt$.

2. En utilisant une intégration par parties, en déduire $I(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

3. Quelle est la limite à droite en 0 de $I(x)$?

4. Quelle est la limite à gauche en 1 de $I(x)$?

Exercice 4. Démontrer les résultats suivants

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt & \text{ converge.} & \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2+t} dt & \text{ converge.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+2t+3} dt & \text{ converge.} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+2t} dt & \text{ diverge.} \\ \int_0^{\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-2} dt & \text{ diverge.} & \int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt & \text{ converge.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{\sqrt{t^4+2t^8}} dt & \text{ converge.} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t^2+2}} dt & \text{ diverge.} \\ \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t}} dt & \text{ diverge.} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{\sqrt{|t|}} e^{-|t|} dt & \text{ converge.} \end{aligned}$$

Exercice 5. Démontrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt & \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t^2+1} dt ; \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t)} dt & \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(t)} dt . \end{aligned}$$

Exercice 6. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t+e^{-t}} dt & \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2+1} dt ; \\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} e^{-t} dt & \quad ; \quad \int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1}) dt ; \\ \int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}) dt & \quad ; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}} dt ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln(t))^3} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin(t) + \sin^2(t)}{\sqrt[3]{t^4 + t^3}} dt ; \\
& \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2+2t} dt ; \\
& \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^3} dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} t^{-\frac{t}{t+1}} dt ; \\
& \int_0^{+\infty} \sqrt{t+2} \sin\left(\frac{3}{(t+1)^2}\right) dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{t^2+2t} \sin\left(\frac{2}{(t+1)^2}\right) dt ; \\
& \int_0^1 \frac{\sqrt{\ln(1+t)}}{\arctan(t+t^2)} dt \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{\ln(1+t)}}{\arctan(t^2+t^3)} dt \quad ; \\
& \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\arctan(t^2+t-2)} dt \quad ; \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\arctan(t^2-2t+1)} dt .
\end{aligned}$$

Exercice 7. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 + \sin(t)}{t^2 + 1} dt ; \\
& \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(t)} dt \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t(1-t^2) \ln|t|} dt .
\end{aligned}$$

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, la fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}^+$, affine par morceaux, et nulle en 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = 1, \quad f(n-1/n) = f(n+1/n) = 0 \quad (\text{a})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = 1/n, \quad f(n-1/n) = f(n+1/n) = 0 \quad (\text{b})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n, \quad f(n-1/n^2) = f(n+1/n^2) = 0 \quad (\text{c})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n, \quad f(n-1/n^3) = f(n+1/n^3) = 0 \quad (\text{d})$$

Pour chacun de ces cas.

1. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est-elle convergente ?

Exercice 9. On rappelle la tangente hyperboliques est définie par :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .$$

1. Vérifier que $\tanh(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$.

2. Déterminer les deux réels a et b tels que la fonction $f : x \mapsto x \tanh(x) - (ax + b)$ soit d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$.

Exercice 10. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est défini comme l'unique angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = x$.

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) = -\arctan(-x)$, et que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer les deux réels a et b tels que l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x^2) - (ax + b)$ soit convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt.$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $\sin(x) \geq a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente.

Exercice 12. Soit a un nombre réel.

1. Discuter, en fonction de a , la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{a-t} \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt$.
2. Utiliser le changement de variable $t \mapsto u = \sqrt{\frac{1-t}{t}}$ pour calculer cette intégrale pour $a = 2$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels. Discuter en fonction de a et b la nature de l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 t^{-a} (1-t)^{-b} dt.$$

Exercice 14. Soient a et b deux réels. Discuter en fonction de a et b la nature de l'intégrale suivante.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^a)}{t^b} dt.$$

Exercice 15. Soient a, b, c trois réels. Discuter en fonction de a, b, c la nature de l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 \frac{t^c}{(1-t)^a |\ln(1-t)|^b} dt.$$

Exercice 16. Utiliser le théorème d'Abel pour démontrer que les intégrales suivantes convergent. Montrer qu'elles ne convergent pas absolument.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t^2+t}} dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{\sqrt{t+2}} dt, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\ln(t)} dt, \quad \int_3^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{\ln(\ln(t))} dt.$$

Exercice 17. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

1. Appliquer le critère d'Abel pour démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ converge pour tout a tel que $0 < a < 1$.
2. En utilisant le changement de variable $t \mapsto u = t^\alpha$, démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha) dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- ☐ A Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge.
- ☐ B Si l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
- ☐ C Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.
- ☐ D Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- ☐ E Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(|x|) = 0$, alors l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge.

Question 2. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1[$.

- ☐ A Si l'intégrale de f sur $[0, 1]$ converge, alors l'intégrale de $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ sur $[1, +\infty[$ converge.
- ☐ B Si l'intégrale de $x \mapsto f(\frac{1}{x-1})$ sur $[1, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $[0, 1]$ converge.
- ☐ C Si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, alors l'intégrale de f sur $[0, 1]$ converge.
- ☐ D Si l'intégrale de f sur $[0, 1]$ diverge, alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = +\infty$.
- ☐ E L'intégrale de f sur $[0, 1]$ converge si et seulement si l'intégrale de $x \mapsto f(\frac{1}{1-x})$ sur $[1, +\infty[$ converge.

Question 3. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

- ☐ A Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de $|f|$ sur $[0, +\infty[$ converge.
- ☐ B Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f^2 sur $[0, +\infty[$ converge.

- [C] Si l'intégrale de $|f|$ sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
- [D] Si l'intégrale de $|f|$ sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de $x \mapsto \sup\{f(x), 0\}$ sur $[0, +\infty[$ converge.
- [E] Si l'intégrale de $|f|$ sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f^2 sur $[0, +\infty[$ converge.

Question 4. Soit f sur fonction définie, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.

- [A] Si $xf(x)$ est majoré sur $\mathbb{R}^+$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
- [B] Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}f(x) = \frac{1}{2}$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
- [C] Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2f(x) = +\infty$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.
- [D] Si $f(x)$ est équivalent à $\frac{\ln(x)}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.
- [E] Si pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq \frac{1}{x \ln(x)}$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.

Question 5. Soit f sur fonction définie, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

- [A] Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}f(x) = 2$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.
- [B] Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(|x|)f(x) = 2$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ diverge.
- [C] Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$, alors l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge.
- [D] Si l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge, alors $xf(x)$ est bornée au voisinage de 0^+ .
- [E] Si l'intégrale de f sur $]0, 1]$ diverge, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Question 6. L'intégrale proposée converge.

- [A] $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln^2 x} dx$
- [B] $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+4x^2+4}} dx$
- [C] $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^5+4x^2+4}} dx$
- [D] $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x^2+4}} dx$
- [E] $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+4x^2+4}} dx$

Question 7. L'intégrale proposée converge.

- [A] $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2(-x)} dx$
- [B] $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+2x^5}} dx$
- [C] $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^3+2x^4}} dx$

☐ D $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

☐ E $\int_0^1 e^{-\ln(x+3x^4)} dx$

Question 8. L'intégrale proposée est absolument convergente.

☐ A $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} dx$

☐ B $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$

☐ C $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$

☐ D $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^3+1}} dx$

☐ E $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^4+x^2}} dx$

Question 9. L'intégrale proposée est convergente, mais pas absolument convergente.

☐ A $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+1}} dx$

☐ B $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^3+1}} dx$

☐ C $\int_0^{+\infty} x \sin(x) e^{-x} dx$

☐ D $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}} dx$

☐ E $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2+x^3}} dx$

Question 10.

☐ A $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

☐ B $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

☐ C $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$

☐ D $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} dx = 4$

☐ E $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$

Réponses : 1-BC 2-CE 3-CD 4-DE 5-AB 6-CE 7-CD 8-CD 9-AE 10-CE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec

le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Les fonctions f et g considérées ici sont supposées définies, continues et strictement positives sur $[0, 1[$.

1. Définir la convergence de l'intégrale de f sur $[0, 1]$.
2. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \varepsilon, 1[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
Démontrer que si $\int_0^1 g(t) dt$ converge, alors $\int_0^1 f(t) dt$ converge, et que si $\int_0^1 f(t) dt$ diverge, alors $\int_0^1 g(t) dt$ diverge.
3. On suppose maintenant que f et g sont équivalentes au voisinage de 1^- :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Démontrer que $\int_0^1 f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 g(t) dt$ converge.

4. Démontrer que pour tout réel α , l'intégrale $\int_0^1 \frac{(-\ln(1-t))^\alpha}{\sqrt{1-t}} dt$ converge.
5. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\frac{(-\ln(1-t))}{\sin(\pi t)}} dt$ converge.

Exercice 1 :

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

converge. On note $f(x)$ sa valeur.

2. En utilisant deux intégrations par parties successives, vérifier que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt.$$

3. Démontrer que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt$ est absolument convergente, et retrouver le résultat de la question 1.
4. Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$\left| f(x) - \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \frac{2}{x^2}.$$

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

5. Écrire la dérivée de f . En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x) - \cos(x) + 1.$$

6. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Exercice 2 : Le but de l'exercice est de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

- Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est convergente.
- En utilisant une intégration par parties et le changement de variable $t \mapsto u = 2t$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt$$

En utilisant le changement de variables $t \mapsto u = nt$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt.$$

Calculer A_0 et A_1 .

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin^2(nt) - 2 \sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = 2 \sin^2(t) \cos(2(n+1)t).$$

En déduire que $A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0$.

6. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n \frac{\pi}{2}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)} dt.$$

Montrer que $A_n - B_n = \frac{\pi}{4}$.

8. En utilisant le fait que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \leq I_n \leq A_n$.

9. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Pour tout x tel que $0 < x < 1$, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[0, x]$. Son intégrale sur $[0, x]$ est donc définie. On dit que l'intégrale de f sur $[0, 1]$ converge si la limite quand x tend vers 1^- de l'intégrale de f sur $[0, x]$

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x f(t) dt .$$

2. Par la relation de Chasles, pour $0 < x < y < 1$,

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^y f(t) dt + \int_y^x f(t) dt .$$

Donc pour tout $y \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 f(t) dt \text{ converge} \iff \int_y^1 f(t) dt \text{ converge} .$$

La convergence des intégrales sur $[0, 1]$ ne dépend que du comportement des fonctions au voisinage de 1. En utilisant la monotonie des intégrales et l'hypothèse, pour tout $x \in [1 - \varepsilon, 1]$,

$$\int_{1-\varepsilon}^x f(t) dt \leq \int_{1-\varepsilon}^x g(t) dt$$

Comme f et g sont positives, les deux intégrales ci-dessus sont fonction croissante de x . Si l'intégrale de g converge, alors celle de f est majorée, donc elle converge. Si l'intégrale de f diverge (tend vers $+\infty$), il en est de même pour celle de g .

3. Si

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 ,$$

alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \varepsilon, 1]$,

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2g(x) .$$

Si l'intégrale de g converge, alors l'intégrale de $2g$ converge également, donc celle de f aussi, d'après la question précédente. Si l'intégrale de f converge, alors celle de $\frac{1}{2}g$ converge également d'après la question précédente, donc celle de g aussi.

4. D'après les limites classiques,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x)(1-x)^{\frac{1}{4}} = 0 .$$

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [1 - \varepsilon, 1[$,

$$\frac{(-\ln(1-x))^\alpha}{\sqrt{1-x}} \leq (1-x)^{-\frac{3}{4}}.$$

En appliquant le résultat de la question 2, pour montrer que l'intégrale proposée converge, il suffit de montrer que l'intégrale de $(1-x)^{-\frac{3}{4}}$ converge.

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt = -4(1-x)^{\frac{1}{4}} + 4,$$

qui tend vers 4 quand x tend vers 1^- .

5. Au voisinage de 1^- ,

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin(\pi(1-x)) \underset{1^-}{\sim} \pi(1-x).$$

Donc

$$\sqrt{\frac{(-\ln(1-t))}{\sin(\pi t)}} \underset{1^-}{\sim} \sqrt{\frac{(-\ln(1-t))}{\pi(1-t)}}$$

La seconde intégrale converge d'après le résultat de la question 4, donc la première converge d'après le résultat de la question 3.

Exercice 1 :

1. Pour tout $a > x > 0$, L'intégrale

$$\int_x^a \sin(t) dt = \cos(x) - \cos(a)$$

est bornée (comprise entre -2 et 2). La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive et décroissante sur $[x, +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est 0. Donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, par application du théorème d'Abel.

2. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{\cos(x)}{x} - \left[\frac{\sin(t)}{t^2} \right]_x^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt \\ &= \frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt. \end{aligned}$$

3.

$$\int_x^{+\infty} \left| \frac{2 \sin(t)}{t^3} \right| dt \leq 2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{x^2}.$$

Donc pour tout $x > 0$, l'intégrale sur $[x, +\infty[$ de $\frac{\sin(t)}{t}$ est la somme d'une fonction de x et d'une intégrale convergente. Elle est donc convergente.

4. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{\cos(x)}{x} \right| &= \left| \frac{\sin(x)}{x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{2 \sin(t)}{t^3} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x^2} + \int_x^{+\infty} \left| \frac{2 \sin(t)}{t^3} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ converge, en appliquant le théorème d'Abel comme dans la question 1. Nous venons de voir que $|f(t) - \frac{\cos(t)}{t}|$ est majoré par une fonction dont l'intégrale converge, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \frac{\cos(t)}{t} \right) dt$ est absolument convergente. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale absolument convergente, donc elle converge.

5. La dérivée de f (comme intégrale dépendant de sa borne inférieure) est :

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x 1 f(t) dt \\ &= [t f(t)]_0^x - \int_0^x t f'(t) dt \\ &= x f(x) + \int_0^x \sin(t) dt \\ &= x f(x) - \cos(x) + 1 \end{aligned}$$

6. D'après la question 4,

$$|x f(x) - \cos(x)| \leq \frac{2}{x}.$$

Donc quand x tend vers $+\infty$, $x f(x) - \cos(x)$ tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) - \cos(x) + 1 = 1 = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 2 :

1. Remarquons que

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin^2(t)}{t^2} = 1 .$$

La fonction peut être prolongée par continuité en 0, donc le problème de la convergence de l'intégrale ne se pose qu'en $+\infty$. Il suffit d'utiliser le théorème de comparaison. Pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} .$$

Or l'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$ converge, donc l'intégrale de $\frac{\sin^2(t)}{t^2}$ sur $[0, +\infty[$ converge.

2.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\sin^2(t)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(u)}{u} \frac{1}{2} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt . \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} n^2 \frac{\sin^2(u)}{u^2} \frac{1}{n} du .$$

Donc

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt .$$

Puisque l'intégrale de $\frac{\sin^2(t)}{t}$ converge,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt .$$

4.

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

5. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \sin(a+b) \sin(a-b) &= \left(\sin a \cos b + \cos a \sin b \right) \left(\sin a \cos b - \cos a \sin b \right) \\
 &= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b \\
 &= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b \\
 &= \sin^2 a - \sin^2 b.
 \end{aligned}$$

En appliquant cette formule à $a = n, b = n + 1$, puis $a = n + 2, b = n + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) \\
 &= -\sin((2n+1)t) \sin(t) + \sin((2n+3)t) \sin(t) \\
 &= \sin(t) \left(2\sin(t) \cos((2n+2)t) \right) \\
 &= 2\sin^2(t) \cos(2(n+1)t).
 \end{aligned}$$

En divisant par $\sin^2(t)$, puis en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2(n+1)t) dt = \left[\frac{1}{n+1} \sin(2(n+1)t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

6. La propriété est vraie pour A_0 et A_1 . Supposons-la vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à n . D'après la question précédente,

$$A_{n+1} = 2A_n - A_{n-1} = 2n\frac{\pi}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2} = (n+1)\frac{\pi}{2},$$

D'où le résultat par récurrence.

7.

$$\begin{aligned}
 A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt) \left(\frac{1}{\sin^2(t)} - \frac{1}{\tan^2(t)} \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt) \frac{1 - \cos^2(t)}{\sin^2(t)} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} dt \\
 &= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2nt)}{4n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

8. En passant à l'inverse, puis en multipliant par $\sin^2(nt)$:

$$\frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)} \leq \frac{\sin^2(nt)}{t^2} \leq \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}$$

En utilisant la monotonie des intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt ,$$

soit $B_n \leq I_n \leq A_n$.

9. De la question précédente, nous déduisons que :

$$\frac{B_n}{n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{A_n}{n} .$$

D'après la question 6, $\frac{A_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ De plus d'après la question 7,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{n} - \frac{B_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4n} = 0 .$$

Donc $\frac{B_n}{n}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Par le théorème des gendarmes, $\frac{I_n}{n}$ tend aussi vers $\frac{\pi}{2}$. Cette limite est l'intégrale cherchée, d'après la question 3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} .$$

3 Compléments

3.1 La pédagogie des sourds-muets

Comme la plupart des savants de son temps, John Wallis (1616–1703) avait de nombreuses cordes à son arc. Pendant plus de 40 ans, il fut le cryptographe en chef du parlement puis de la cour royale. Il publia aussi sur la théologie, la théorie de la musique, la circulation du sang, la collision des corps, la logique, la grammaire anglaise, etc. Il était surtout un excellent mathématicien et un formidable calculateur, capable dit-on d'extraire de tête la racine carrée d'un nombre de plus de 50 chiffres. Son « *Arithmetica Infinitorum* », publié en 1656, préfigure le calcul infinitésimal. Par des méthodes de calcul de séries, il obtient pour la première fois l'intégrale des puissances de la variable, y compris négatives. Il est donc le premier à avoir compris que l'aire d'un domaine non borné peut être finie.

$$\forall r > 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{r-1}.$$

Bien sûr, il n'exprimait pas le résultat sous cette forme, et ses raisonnements étaient essentiellement géométriques. Il est tout de même le premier à avoir noté l'infini par le symbole ∞ .

Sa controverse de plus de 20 ans avec Thomas Hobbes (1588–1679) est restée célèbre. Il faut dire que Hobbes ne se contentait pas d'avoir fondé la philosophie politique (il est l'inventeur de la notion de « contrat social »). Il prétendait aussi résoudre les problèmes mathématiques classiques qu'étaient la quadrature du cercle et la duplication du cube, mais avait beaucoup mal à reconnaître que ses démonstrations étaient fausses. Quand en 1661 Wallis entreprend d'apprendre l'anglais à un sourd-muet, la comparaison ne manque pas de saveur.

I am now upon another work; as hard almost as to make Mr. Hobbes understand a demonstration. It is to teach a person dumb and deaf to speak, and to understand a language : of which he could do either, the other would be more easy; but knowing neither, makes both the harder. And although the former may be thought the more difficult, the latter may perhaps require as much of time. For, if a considerable time be requisite for him, that can speak no one, to learn a second language; much more for him, that knows none, nor hath so much as the advantage of speech.

3.2 Un tour de passe-passe d'Euler

En ces temps insoucians où démontrer la convergence d'une intégrale avant de la calculer ne venait à l'idée de personne, le virtuose qu'était Euler ne se privait pas d'offrir au monde savant ces perles dont son cerveau fertile était prodigue. Celle-ci par

exemple, parue aux commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en 1761.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x^n)^k dx = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}} dy .$$

Comment avait-il trouvé cela ? Facile quand on s'appelle Euler : il suffit(!) de faire le changement de variable

$$x = \frac{y}{(1+y^n)^{\frac{1}{n}}} .$$

(Allez-y, vérifiez...)

Comment Euler s'y prend-il pour calculer ces intégrales ? Admirez l'artiste. Il commence par poser

$$P = x^\alpha (1-x^n)^\gamma ,$$

d'où il tire (nous reproduisons ses expressions)

$$dP = \alpha x^{\alpha-1} dx (1-x^n)^\gamma - \gamma n x^{\alpha+n-1} dx (1-x^n)^{\gamma-1} .$$

Dans la partie gauche, le facteur $(1-x^n)^\gamma$ est récrit en $(1-x^n)^{\gamma-1}(1-x^n)$; les termes se réarrangent ainsi.

$$dP = \alpha x^{\alpha-1} dx (1-x^n)^{\gamma-1} - \gamma n x^{\alpha+n-1} dx (1-x^n)^{\gamma-1} .$$

Dernier tour de passe-passe : le facteur $x^{\alpha+n-1}$ devient $x^{\alpha-1}(1-(1-x^n))$:

$$dP = (\alpha + \gamma n) x^{\alpha-1} dx (1-x^n)^{\gamma-1} - \gamma n x^{\alpha-1} dx (1-x^n)^{\gamma-1} .$$

Or P s'annule en 0 et 1 : Euler déduit trois identités d'intégrales des trois expressions de dP .

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^n)^\gamma dx &= \gamma n \int_0^1 x^{\alpha+n-1} (1-x^n)^{\gamma-1} dx , \\ \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^n)^{\gamma-1} dx &= (\alpha + \gamma n) \int_0^1 x^{\alpha+n-1} (1-x^n)^{\gamma-1} dx , \\ (\alpha + \gamma n) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^n)^\gamma dx &= \gamma n \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^n)^{\gamma-1} dx , \end{aligned}$$

Une formule récurrente, et hop, le tour est joué ! Avec en prime une foule d'identités reliant des rapports d'intégrales à des produits infinis... dont la convergence ne faisait pas vraiment partie des préoccupations d'Euler.

3.3 La courbe de Gauss

Il existe au moins une dizaine de démonstrations différentes du résultat suivant.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

L'histoire de la courbe de Gauss remonte à Abraham de Moivre (1667–1754), qui a donné la première version du théorème central limite pour le jeu de pile ou face, en fait une asymptotique des probabilités binomiales. Elle date semble-t-il de 1712, bien que le résultat n'ait été publié qu'en 1733. De Moivre lui-même ne donne qu'une valeur approchée de la constante qui apparaît dans son résultat, dont Stirling donnera la valeur exacte. En fait, ni l'un ni l'autre n'expriment explicitement l'intégrale de la courbe de Gauss, ni ne se préoccupent des questions de convergence. Il y a eu depuis, dans chaque manuel de probabilités, une démonstration du résultat. La méthode de calcul la plus classique utilise un changement de variable en coordonnées polaires. Elle a été popularisée par Ch. Sturm (1803–1855), qui l'attribue à Poisson.

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \\
 &= \pi .
 \end{aligned}$$

Auparavant, P.S. Laplace (1749–1827) avait été le premier en 1774 à fournir un calcul rigoureux. La fonction à intégrer étant paire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \iff \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Voici la méthode que Laplace donne dans sa « Théorie analytique des probabilités ». Elle consiste à écrire une intégrale double, dans laquelle on effectue le changement de variable $y \mapsto s = y/x$.

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2(1+s^2))} x ds \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2(1+s^2))} x dx \right) ds \\
 &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{2(1+s^2)} e^{-x^2(1+s^2)} \right]_0^{+\infty} ds \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+s^2)} ds \\
 &= \left[\frac{1}{2} \arctan(s) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

La « Méthode des moindres carrés », qui implique l'utilisation de la distribution normale dans l'estimation approchée des erreurs, a été publiée en 1805 par Legendre et en 1809 par Gauss. Mais Gauss prétendait à l'antériorité :

Au reste, ce principe, dont nous avons fait usage depuis 1795, a été donné dernièrement par Legendre dans ses Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1805 ; on trouvera dans cet ouvrage plusieurs conséquences que le désir d'abrégé nous a fait omettre.

Cette citation négligente eut le don d'agacer sérieusement Legendre, qui répliqua.

Je ne vous dissimulerai donc pas, Monsieur, que j'ai éprouvé quelque regret de voir qu'en citant mon mémoire... , vous dites *principum nostrum*... Il n'est aucune découverte qu'on ne puisse s'attribuer en disant qu'on avait trouvé la même chose quelques années auparavant ; mais si on n'en fournit pas la preuve en citant le lieu où on l'a publiée, cette assertion devient sans objet et n'est plus qu'une chose désobligeante pour le véritable auteur de la découverte. En Mathématiques il arrive très souvent qu'on trouve les mêmes choses qui ont été trouvées par d'autres et qui sont bien connues ; c'est ce qui m'est arrivé nombre de fois, mais je n'en ai point fait mention et je n'ai jamais appelé *principum nostrum* un principe qu'un autre avait publié avant moi. Vous êtes assez riche de [votre] fond, Monsieur, pour n'avoir rien à envier à personne ; et [je suis] bien persuadé au reste que j'ai à me plaindre de l'expression seulement et nullement de l'intention...

Mais Gauss persiste et signe.

Je n'avais pas l'idée, que M. Legendre pouvait attacher tant de prix à une idée aussi simple, qu'on doit plutôt s'étonner qu'on ne l'a pas eue depuis 100 ans, pour se fâcher que je raconte, que je m'en suis servi avant lui ?

Le différent n'est toujours pas réglé. Sans vouloir jeter de l'huile sur le feu, un troisième larron, beaucoup moins connu que les deux précédents, a lui aussi publié la méthode des moindres carrés, en 1808 sans connaître les travaux des deux autres. Il s'agit de Robert Adrain (1775–1863), mathématicien américain d'origine irlandaise. Comme le dit B. Hayes¹,

One obvious fact is that it can be very hard to get noticed when you are standing on the farther shore of the ocean, no matter how vigorously you wave your arms. Another truth, even more bitter, is that it's also very hard in those circumstances to do anything worth noticing. And yet there is a more cheerful outlook, at least for those who can afford to be patient : The world turns, and eventually the farther shore may become the center.

Sachez aussi que Adrain s'est fait licencié (à 59 ans) de son poste à l'université, car il ne parvenait pas à maintenir la discipline dans ses cours.

1. B. Hayes : Science on the farther shore *American Scientist* 90(6) p. 499–502 (2002)