Réduction des endomorphismes

Luc Rozoy, Bernard Ycart

Ceci est votre premier pas vers l'analyse spectrale qui vous accompagnera, dans ses diverses généralisations, tout au long de vos études de mathématiques. Votre objectif minimal est d'apprendre à diagonaliser les matrices carrées lorsque c'est possible, et c'est déjà un enjeu majeur pour une foule d'applications, de la physique à l'informatique, en passant par la statistique et l'analyse numérique. Vous aurez besoin des espaces vectoriels de dimension finie, systèmes linéaires, calcul matriciel et déterminants.

Table des matières

16 mai 2014

1 Cours

1.1 Matrices diagonalisables

Toutes les matrices considérées sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les vecteurs sont identifiés à des matrices à n lignes et 1 colonne.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$\forall i \neq j \ , \quad a_{i,j} = 0 \ .$$

Elle est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour comprendre le rôle des coefficients diagonaux, supposons tout d'abord qu'ils sont tous égaux à λ. Dans ce cas, A est proportionnelle à la matrice identité : $A = \lambda I$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le vecteur Ax est proportionnel à x : $Ax = \lambda x$. Multiplier le vecteur x par la matrice A revient à le multiplier par le facteur λ. Géométriquement, c'est effectuer une *homothétie* de rapport λ.

Supposons maintenant que les coefficients diagonaux soient quelconques. Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et examinons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans cette base. Dire que A est diagonale, c'est dire que l'image du vecteur e_i de la base est $\lambda_i e_i$. Si on restreint f à la direction e_i, f est une homothétie de rapport λ_i. Si x est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, x s'écrit $\sum x_i\, e_i$. Son image par f est :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i\, e_i \ .$$

Les matrices diagonales sont particulièrement simples à manipuler. Voici les propriétés principales :

- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux.

$$|A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n \ .$$

- Multiplier à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier la i-ième ligne par λ_i : si $B = (b_{i,j})$ est une matrice quelconque, alors

$$AB = (\lambda_i\, b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d} \ .$$

- Multiplier à droite par une matrice diagonale revient à multiplier la j-ième colonne par λ_j : si $B = (b_{i,j})$ est une matrice quelconque, alors

$$BA = (b_{i,j}\,\lambda_j)_{i,j=1,\ldots,d}\ .$$

- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, la matrice est inversible :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- La puissance k-ième d'une matrice diagonale est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Pour une matrice A quelconque, les calculs se simplifient à partir du moment où elle est *semblable* à une matrice diagonale. Deux matrices A et D sont *semblables*, lorsqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, ou encore, quand il existe une *matrice de passage* P telle que $P^{-1}AP = D$. Par exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Définition 1. *Une matrice A est dite* diagonalisable *si elle est semblable à une matrice diagonale.*

L'objectif des deux premières sections de ce chapitre est d'apprendre à *diagonaliser* une matrice, quand c'est possible.

Définition 2. Diagonaliser *une matrice A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que :*

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1} .$$

Si $D = P^{-1}AP$, alors $AP = PD$. Mais si D est une matrice diagonale, multiplier P à droite par D revient à multiplier les vecteurs colonnes de P par les coefficients diagonaux de D. Notons v_i le i-ième vecteur colonne de la matrice P et λ_i le i-ième coefficient diagonal de D. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, on doit avoir :

$$Av_i = \lambda_i v_i \iff (A - \lambda_i I)v_i = 0 ,$$

en notant I la matrice identité de dimension n. On dit que v_i est un *vecteur propre* de A associé à la *valeur propre* λ_i.

Définition 3. *On dit que v est un* vecteur propre *de A associé à la* valeur propre λ *si v est un vecteur non nul et :*

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0 .$$

Observons que λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $(A-\lambda I)v = 0$ a une solution non nulle. Voici deux manières équivalentes de l'exprimer.

Proposition 1. *Un nombre complexe λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

1. *Le rang de la matrice $A - \lambda I$ est strictement inférieur à n.*
2. *Le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ est nul :*

$$|A - \lambda I| = 0 .$$

Définition 4. *On appelle* polynôme caractéristique *de la matrice A, et on note $P_A(X)$ le déterminant de la matrice $A - XI$.*

$$P_A(X) = |A - XI| = \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & \ldots & & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \ldots & & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - X \end{vmatrix}$$

D'après la forme développée d'un déterminant, $P_A(X)$ est une somme de produits des termes de la matrice. Chaque produit est constitué de n facteurs qui sont des termes pris dans des lignes et des colonnes différentes. Le terme de plus haut degré en X dans le déterminant $|A - XI|$ provient du produit des termes qui contiennent tous X, à savoir les coefficients diagonaux : $\prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X)$. Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est donc de degré n : son terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$. Tant que nous y sommes, observons que le terme constant de $P_A(X)$ est le *déterminant* de A ; c'est aussi le *produit des valeurs propres* (comptées avec leurs multiplicités). Le coefficient du terme de degré X^{n-1} dans $P_A(X)$ est la somme des termes diagonaux, que l'on appelle la *trace* de la matrice A ; c'est aussi la *somme des valeurs propres* (toujours comptées avec leurs multiplicités).

Comme les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique, une matrice de dimensions $n \times n$ admet au plus n valeurs propres distinctes. Pour qu'une matrice soit diagonalisable, il faut déjà que son polynôme caractéristique admette effectivement n racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité), donc qu'il soit *scindé*. C'est toujours le cas dans $\mathbb{C}$, pas toujours dans $\mathbb{R}$.

Si λ est une valeur propre, l'ensemble des vecteurs v tels que $(A-\lambda I)v = 0$, est un sous-espace vectoriel. Par définition, il contient le vecteur nul, et tous les vecteurs propres de A associés à λ. On l'appelle le « *sous-espace propre* » associé à λ.

Définition 5. *Soit λ une valeur propre, on appelle* sous-espace propre associé à λ *l'espace vectoriel*

$$\{\, v \in \mathbb{R}^n \,,\ Av = \lambda v \,\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \;.$$

Théorème 1. *Soit A une matrice, dont le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ est* scindé. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les racines de $P_A(X)$ et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités respectives ($m_1 + \cdots + m_k = n$). La matrice A est diagonalisable si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, k$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est de dimension m_i.*

$$\forall i = 1, \ldots, k \;, \quad \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)) = m_i \;.$$

Démonstration : Remarquons qu'un même vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre. Par conséquent, deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes ont une intersection réduite au vecteur nul : les sous-espaces propres sont en *somme directe*.

Supposons que A soit diagonalisable : $P^{-1}AP = D$, mais aussi $P^{-1}(A - XI)P = (D - XI)$. Les propriétés générales des déterminants font que $|A - XI| = |D - XI|$: le polynôme caractéristique de A et celui de D sont les mêmes :

$$P_A(X) = P_D(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} \;.$$

Or le polynôme caractéristique de D est le produit des termes diagonaux. Cela signifie que pour tout $i = 1, \ldots, k$, exactement m_i termes diagonaux de D sont égaux à λ_i. Il existe donc m_i vecteurs colonnes de P qui sont des vecteurs propres de A, associés à la valeur propre λ_i. Comme ces vecteurs forment une famille libre, la dimension du sous-espace propre associé est au moins égale à m_i. Comme $m_1 + \cdots + m_k = n$, et que les sous-espaces propres sont en somme directe, chacun est de dimension exactement m_i et leur somme directe est $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si pour tout i le sous-espace propre associé à λ_i est de dimension m_i, alors leur somme directe est $\mathbb{R}^n$: on peut constituer une base de $\mathbb{R}^n$ en choisissant une base de vecteurs dans chaque sous-espace propre. □

La mauvaise nouvelle est que toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. La bonne nouvelle est que celles que vous rencontrerez, entreront souvent dans l'une des catégories couvertes par les deux théorèmes suivants : valeurs propres toutes distinctes, ou bien matrices symétriques.

Théorème 2. *Soit A une matrice admettant n valeurs propres* toutes distinctes. *Alors A est diagonalisable.*

Démonstration : Nous allons montrer par récurrence sur k que si $v_1, \ldots, v_k$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *toutes distinctes*, alors $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille libre :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \ , \ \forall i = 1, \ldots, k \ .$$

C'est vrai pour $k = 1$, puisque par définition un vecteur propre est non nul. Supposons la propriété vraie à l'ordre $k-1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs propres associés. Supposons :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i = -\alpha_k v_k \ .$$

En multipliant à gauche par la matrice A, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i v_i = -\alpha_k \lambda_k v_k \ .$$

Mais aussi :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_k v_i = -\alpha_k \lambda_k v_k \ .$$

Soit en soustrayant les deux équations :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0 \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre $k-1$, ceci entraîne que pour tout $i = 1, \ldots, k-1$, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, donc $\alpha_i = 0$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_k$. Mais alors nécessairement $\alpha_k v_k$ est nul, donc $\alpha_k = 0$ puisque le vecteur propre v_k est non nul.

Supposons qu'une matrice A admette n valeurs propres toutes distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour $i = 1, \ldots, n$, choisissons un vecteur propre v_i associé à λ_i. D'après ce qui précède $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc une base. □

Théorème 3. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique : $A = {}^tA$. Alors :*

1. *toutes les valeurs propres de A sont réelles ;*
2. *A est diagonalisable ;*
3. *on peut choisir comme base de vecteurs propres une base telle que la matrice de passage P vérifie $P^{-1} = {}^tP$ (une telle base est dite* orthonormée*).*

Le fait d'avoir une base orthonormée permet d'écrire l'inverse de la matrice de passage sans calcul supplémentaire (car $P^{-1} = {}^tP$). Ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général, pour une matrice A à valeurs complexes qui est *hermitienne*, c'est-à-dire telle que $A = {}^t\overline{A}$, soit $\overline{a_{j,i}} = a_{i,j}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z. Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont *réelles*, la matrice est diagonalisable et il existe une matrice de vecteurs propres *unitaire*, à savoir telle que $P^{-1} = {}^t\overline{P}$.

Démonstration : Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$. Considérons le produit : ${}^t\overline{v}v$. C'est la somme des modules des coordonnées de v, à savoir un réel strictement positif. Soit λ une racine (dans $\mathbb{C}$) de $P_A(X)$, et soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Donc :

$$
{}^t\overline{v}Av = \lambda {}^t\overline{v}v
$$

Prenons le conjugué de la transposée de ce même produit (rappelons que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

$$
\overline{\lambda}({}^t\overline{v}v) = {}^t(\overline{{}^t\overline{v}Av}) = {}^t\overline{v}\,{}^t\overline{A}\,v = {}^t\overline{v}\,A\,v = \lambda({}^t\overline{v}v)\ ,
$$

puisque A est symétrique. Donc $\lambda = \overline{\lambda}$: la valeur propre λ est réelle.

Considérons l'ensemble des vecteurs *orthogonaux* à v :

$$
E = \{\, u \in \mathbb{R}^n\,,\ {}^tuv = {}^tvu = 0 \,\}\ .
$$

L'ensemble E est le noyau d'une application linéaire de rang 1 (car v est non nul). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-1$. Soit u un vecteur de E :

$$
{}^tvAu = {}^t({}^tvAu) = {}^tu\,{}^tA\,v = {}^tuAv = \lambda {}^tuv = 0\ .
$$

Donc $Au \in E$ (on dit que E est *stable* par A). Nous admettrons ici que dans tout espace vectoriel de dimension finie, il est possible de choisir une base orthormale (par exemple grâce au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, vu dans un autre chapitre). Soit $u_1, \ldots, u_{n-1}$ une base orthonormale de E. Quitte à diviser v par $\sqrt{{}^tvv}$, on peut supposer que ${}^tvv = 1$. Par construction, $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Notons P la matrice de ses vecteurs colonnes : $P^{-1} = {}^tP$. Au travers du changement de base de matrice de passage P, A est transformée en une matrice diagonale par blocs :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} .$$

En effet, la première colonne est nulle après le premier terme car v est un vecteur propre associé à λ. La première ligne est nulle après le premier terme car E est stable par A : les images de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ appartiennent à E. De plus :

$${}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = P^{-1}AP ,$$

de sorte que $P^{-1}AP$ est symétrique, donc B l'est aussi. D'où le résultat, par récurrence sur n. □

1.2 Pratique de la diagonalisation

La procédure est un peu longue à appliquer, mais assez simple.

1. *Factoriser le polynôme caractéristique*
   Attention au calcul du déterminant : le but étant de factoriser, vous avez intérêt à combiner des lignes ou des colonnes, plutôt que de développer, même en dimension 3. Si le polynôme caractéristique a des racines complexes, la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais elle peut l'être dans $\mathbb{C}$. Nous supposons désormais que le polynôme caractéristique est scindé :

$$P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_1)^{m_i} .$$

2. *Trouver une base de chaque sous-espace propre*
   Vous avez k systèmes linéaires à résoudre. Si pour l'une des valeurs propres λ_i, le système $(A - \lambda_i I)x = 0$ est de rang strictement supérieur à $n - m_i$ (l'ensemble des solutions est de dimension strictement inférieure à m_i), alors la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons que vous ayez bien trouvé une base de m_i vecteurs propres pour chaque valeur propre λ_i. Rassemblez les vecteurs que vous avez trouvés pour chaque valeur propre, il y en a n en tout. La matrice dont les colonnes sont ces n vecteurs est la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base.
3. *Calculer l'inverse de P*
   Vous avez alors explicité la diagonalisation : $P^{-1}AP = D$. Attention à respecter le même ordre dans l'écriture des valeurs propres, et dans celle des colonnes de P. Le calcul de P^{-1} n'est pas indispensable, sauf si vous avez explicitement besoin du changement de base.

4. *Vérifiez vos calculs*
   Le plus simple est de calculer PDP^{-1} : vous devez retrouver A. Vous pouvez aussi vérifier pour chacun des vecteurs que vous avez trouvés qu'il est bien vecteur propre.

Pour le cas des valeurs propres de multiplicité 1, signalons comme alternative à la résolution du système linéaire, la « méthode des cofacteurs », à utiliser uniquement en dimensions 2 et 3.

Proposition 2. *Soit λ une valeur propre de A, de multiplicité 1. Considérons une ligne de $A - \lambda I$, choisie de façon que la matrice formée des autres lignes de $A - \lambda I$ soit de rang $n-1$. Le vecteur formé des cofacteurs associés à cette ligne (les $n-1$ déterminants extraits en barrant la ligne choisie et une colonne, avec alternance de signe) est un vecteur propre de A associé à λ.*

Démonstration : Si λ est de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1, et il suffit d'en trouver un vecteur non nul. Soit $\widetilde{A}$ la *comatrice* de A : c'est la matrice des cofacteurs de A, à savoir les déterminants mineurs d'ordre $n-1$, extraits en supprimant une ligne et une colonne, affectés de signes alternés. Il se trouve que $A\,{}^t\widetilde{A} = |A|I$. Appliquons ce résultat à $A-\lambda I$, qui est de rang $n-1$: $(A-\lambda I)\,{}^t(\widetilde{A - \lambda I})$ est la matrice nulle. Cela signifie que les lignes de $\widetilde{A - \lambda I}$ sont soit nulles, soit vecteur propre de A associé à λ. □

Nous détaillons d'abord l'exemple suivant, donné en introduction.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Commençons par écrire la matrice $A - XI$.

$$A - XI = \begin{pmatrix} -X & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - X & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - X \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite calculer son déterminant. Il serait maladroit d'utiliser la règle de Sarrus pour développer le déterminant et le factoriser ensuite. Il vaut mieux le factoriser en faisant apparaître des zéros par combinaison de lignes et de colonnes. Ajoutons d'abord la seconde colonne à la première :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1-X & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

On peut alors factoriser $(1-X)$ dans la première colonne :

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

Soustrayons ensuite la première ligne à la seconde :

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=} (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-X & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

En développant selon la première colonne, il reste un déterminant d'ordre 2 qui est facile à factoriser.

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-X & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix} = (1-X)\Big((\tfrac{1}{2}-X)^2-(\tfrac{3}{2})^2\Big) = (1-X)(-1-X)(2-X)$$

Les valeurs propres de A sont donc 1, –1 et 2. Comme elles sont distinctes, il suffit de trouver un vecteur propre pour chacune.

Commençons par la valeur propre 1.

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observons que la matrice $A-I$ est bien de rang 2, comme prévu : la somme des trois lignes est nulle et les deux premières lignes sont indépendantes. Nous allons calculer les cofacteurs associés à la troisième ligne. Ils valent (attention à l'alternance de signe) :

$$A_{3,1} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\ ,\ A_{3,2} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\ ,\ A_{3,3} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Tous les vecteurs non nuls, proportionnels au vecteur ${}^t(-1,-1,0)$ sont vecteurs propres de A, associés à la valeur propre 1. Il est conseillé de choisir le plus simple, ici :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le choix de la troisième ligne, pour calculer les cofacteurs, est arbitraire. Il suffit que les deux lignes qui restent ne soient pas proportionnelles (car tous les cofacteurs seraient nuls). Voici par exemple les cofacteurs associés à la deuxième ligne.

$$A_{2,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \ , \ A_{2,2} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \ , \ A_{2,3} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

On pourra trouver un vecteur différent, mais il sera forcément proportionnel à celui qu'on trouve avec une autre ligne. Cela ne change rien au choix du vecteur propre.

Passons maintenant à la valeur propre –1.

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les cofacteurs associés à la troisième ligne sont :

$$A_{3,1} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -3 \ , \ A_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \ , \ A_{3,3} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 3 \ .$$

Ici encore, nous choisirons un vecteur plus simple, proportionnel au vecteur des cofacteurs.

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voici le calcul pour la valeur propre 2 :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les cofacteurs associés à la troisième ligne sont :

$$A_{3,1} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0\ ,\ A_{3,2} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\ ,\ A_{3,3} = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\ .$$

Nous choisirons un vecteur plus simple, proportionnel au vecteur des cofacteurs.

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P sera constituée en juxtaposant les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 (en colonnes).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale D a pour coefficients diagonaux les trois valeurs propres (attention : l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres doit être le même).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous n'insisterons pas sur le calcul de P^{-1}. Observons que la diagonalisation trouvée est loin d'être unique. On peut choisir un ordre différent pour les valeurs propres, et pour chaque valeur propre, n'importe quel vecteur non nul proportionnel à celui qui a été trouvé. On pourra vérifier par exemple, pour la même matrice A que les matrices P et D ci-dessous vérifient également $P^{-1}AP = D$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple ci-dessous, la matrice A est symétrique. Pour le choix des vecteurs propres, nous avons fait en sorte que $P^{-1} = {}^tP$. La technique est la même. Il faut simplement prendre garde à choisir des vecteurs propres tels que ${}^tvv = 1$, ce qui dispensera du calcul de P^{-1}.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D}$$

Voici un exemple en dimension 2, où les valeurs propres sont des nombres complexes (la matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$). C'est la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{D}$$

Voici maintenant un exemple où la valeur propre 1 est double. La méthode des cofacteurs ne s'applique pas pour trouver les vecteurs propres correspondants. Vous devez déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - I)$, en résolvant le système par la méthode du pivot de Gauss comme vous avez appris à le faire. Ici la matrice $A - I$ a une ligne nulle et deux lignes proportionnelles. Elle est donc de rang 1 et le système se réduit à une seule équation, $x = z$. Les deux vecteurs non proportionnels les plus simples solution du système sont obtenus pour $x = 0, y = 1, z = 0$ et $x = 1, y = 0, z = 1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

Vous vérifierez que les deux matrices suivantes, qui ont une valeur propre double, ne sont pas diagonalisables, car le sous-espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1 et non pas 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Que faire dans ce cas ? Les sections suivantes répondent, entre autres, à cette question.

1.3 Polynômes d'endomorphismes

Dans cette section, nous allons raisonner en termes d'endomorphismes plutôt que de matrices. Les changements de base correspondent à des écritures matricielles différentes d'un même endomorphisme. *Réduire* un endomorphisme consiste à chercher une base dans laquelle sa matrice soit simple (dans l'idéal, diagonale). Nous commençons par réécrire les définitions que vous connaissez déjà.

Définition 6. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.*

1. *Un nombre complexe λ est une* valeur propre *de f s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul, tel que $f(v) = \lambda v$.*
2. *Un vecteur $v \in E$ est un* vecteur propre *de f associé à la valeur propre λ de f si v est non nul et $f(v) = \lambda v$.*
3. *Le* sous-espace propre *associé à la valeur propre λ est l'ensemble des vecteurs v tels que $f(v) = \lambda v$, à savoir le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{I}$, où I désigne l'identité de E.*
4. *On dit que f est* diagonalisable *s'il existe une base de E formée de vecteurs propres pour f, ou encore si E est la somme directe des sous-espaces propres de f :*
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{I}) \;.$$
5. *On appelle* polynôme caractéristique *de f le polynôme*
$$P_f(X) = \det(f - X\mathrm{I}) \;,$$
dont les racines sont les valeurs propres de f.

Rappelons que le déterminant d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans une base quelconque de E, et qu'il ne dépend pas de la base. Pour votre culture générale, le *spectre* d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres.

Justifions maintenant le titre de cette section.

Notation 1. *Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.*

1. *Si f est un endomorphisme de E, on note $P(f)$ l'endomorphisme :*
$$a_0\mathrm{I} + a_1f + \cdots + a_df^d = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \;,$$
où $f^0 = \mathrm{I}$ et pour tout $i \geqslant 1$, $f^i = f^{i-1} \circ f$.

2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice, on note $P(A)$ la matrice :*

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_d A^d = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i \ ,$$

où $A^0 = I$ et pour tout $i \geqslant 1$, $A^i = A^{i-1} A$.

Observez la cohérence des deux notations : si A est la matrice de f dans une certaine base, alors $P(A)$ est celle de $P(f)$ dans la même base. Remarquez aussi que deux polynômes du même endomorphisme *commutent*.

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \ , \quad P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) \ .$$

Les sous-espaces propres sont *stables* par f, au sens de la définition suivante :

Définition 7. *Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est* stable *par f si $f(F) \subset F$.*

Proposition 3. *Soient f et g deux endomorphismes qui* commutent *: $f \circ g = g \circ f$. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)$ *sont stables par g.*

Démonstration : Soit v un élément de $\mathrm{Im}(f)$: il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Alors $g(v) = g(f(u)) = f(g(u))$, donc $g(v) \in \mathrm{Im}(f)$.

Soit maintenant $v \in \mathrm{Ker}(f)$: $f(g(v)) = g(f(v)) = g(0) = 0$, donc $g(v) \in$ Ker(f). □

La conséquence est que les sous-espaces propres de f sont stables non seulement par f, mais aussi par tous les $P(f)$, quel que soit le polynôme P. Les polynômes qui nous intéressent ici ont pour racines les valeurs propres de f : en premier lieu le polynôme caractéristique.

Théorème 4 (de Cayley-Hamilton)**.** *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P_f son polynôme caractéristique. Alors $P_f(f)$ est identiquement nul.*

Démonstration : Choisissons une base quelconque de $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de f dans cette base. Nous allons démontrer que $P_f(A)$ est la matrice nulle. Considérons la matrice $A - XI$, dont P_f est le déterminant. Soit $\widetilde{A - XI}$ sa comatrice, à savoir la matrice des cofacteurs (mineurs d'ordre $n-1$ avec alternance de signe). On rappelle que :

$$(A - XI)\, {}^t\!(\widetilde{A - XI}) = P_f(X)\, I \ .$$

Posons $P_f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Développons également ${}^t\!(\widetilde{A - XI})$, comme un polynôme de degré $n-1$, dont les coefficients sont des matrices :

$${}^t\!(\widetilde{A - XI}) = C_0 + C_1 X + \cdots + C_{n-1} X^{n-1} \ ,$$

où $C_0, \ldots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. L'identité rappelée ci-dessus devient :

$$(A - XI)(C_0 + C_1X + \cdots + C_{n-1}X^{n-1}) = a_0I + (a_1I)X + \cdots + (a_nI)X^n \,.$$

Identifions alors les coefficients des deux polynômes :

$$\begin{array}{rcl} AC_0 & = & a_0I \\ AC_1 - C_0 & = & a_1I \\ & \vdots & \\ AC_i - C_{i-1} & = & a_iI \\ & \vdots & \\ AC_{n-1} - C_{n-2} & = & a_{n-1}I \\ -C_{n-1} & = & a_nI \end{array}$$

Pour $i = 0, \ldots, n$, multiplions la i-ième équation par A^i et ajoutons le tout. Le membre de gauche s'annule, et le membre de droite est $P_f(A)$. □

Définition 8. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On dit que P est un* polynôme annulateur *de f si l'endomorphisme $P(f)$ est identiquement nul.*

Observons que tous les multiples d'un polynôme annulateur sont encore des polynômes annulateurs. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique et tous ses multiples sont des polynômes annulateurs. Mais ce n'est pas tout.

Proposition 4. *Il existe un polynôme unitaire unique, appelé* polynôme minimal *de f et noté π_f, tel que tout polynôme annulateur de f est un multiple de π_f.*

Démonstration : Mettons que vous savez déjà que $\mathbb{R}[X]$ est un anneau principal : les polynômes annulateurs forment un idéal propre. Cet idéal est donc engendré par un élément unique, fin de l'histoire.

Euh… vous ne seriez pas contre une démonstration élémentaire ? Considérons l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs non nuls :

$$\{\, \deg(P)\,,\ P \in \mathbb{R}[X]\,,\ P \neq 0\,,\ P(f) = 0 \,\}\,.$$

C'est une partie de $\mathbb{N}$ non vide : elle contient au moins n, puisque le polynôme caractéristique est annulateur. Soit m son plus petit élément, et considérons un polynôme annulateur π de degré m. Montrons que tout polynôme annulateur P est multiple de π. Pour cela considérons la division euclidienne de P par π :

$$P = \pi Q + R\,,$$

où $\deg(R) \leqslant m-1$. Mais si $P(f) = 0$ et $\pi(f) = 0$, alors $R(f) = 0$. Si R était non nul, ce serait un polynôme annulateur de degré strictement inférieur à m, ce qui contredirait la définition de m. Donc R est nul et P est multiple de π. Si π_1 et π_2 sont deux polynômes annulateurs de même degré m, ils sont multiples l'un de l'autre. Ils diffèrent donc par une constante multiplicative. D'où l'unicité, si on suppose que le coefficient du terme de plus haut degré est 1 (polynôme unitaire). $\square$

Proposition 5. *Soit f un endomorphisme, dont le polynôme caractéristique est scindé.*

$$P_f(X) = (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} \ .$$

Son polynôme minimal est :

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{l_i} \ ,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, k$, $1 \leqslant l_i \leqslant m_i$.

Démonstration : D'après le théorème de Cayley-Hamilton et la définition du polynôme minimal, celui-ci divise le polynôme caractéristique. Puisque les polynômes de degré 1 sont irréductibles,

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{l_i} \ ,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant l_i \leqslant m_i$. Nous devons simplement démontrer que $l_i > 0$ pour tout i. Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i. Alors $(f - \lambda_j \mathrm{I})(v) = (\lambda_i - \lambda_j)v$, qui est nul si $i = j$, non nul $i \neq j$. Donc

$$\pi_f(v) = \left(\prod_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{l_j} \right) v \ .$$

Or par définition $\pi_f(v)$ doit être nul, donc l'exposant l_i est bien strictement positif (s'il était nul, $\pi_f(v)$ serait égal à v multiplié par un produit de termes non nuls). $\square$

Un exemple élémentaire vous aidera à comprendre la différence entre polynôme minimal et polynôme caractéristique. Supposons que f soit l'homothétie de rapport λ, soit $f = \lambda \mathrm{I}$. La matrice de f dans n'importe quelle base est diagonale, avec des λ sur la diagonale. Le polynôme caractéristique de f est $P_f = (\lambda - X)^n$, alors que son polynôme minimal est $\pi_f = (X - \lambda)$, puisque $f = \lambda \mathrm{I}$. Or justement, la diagonalisation consiste à écrire une somme directe de sous-espaces propres, pour chacun desquels la restriction de f est une homothétie.

Théorème 5. *Soit f un endomorphisme, dont le polynôme caractéristique est scindé.*

$$P_f(X) = (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} \ .$$

L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *sont racines simples de son polynôme minimal.*

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i) \; .$$

Démonstration : Considérons le polynôme $\pi = \prod_{j=1}^{k}(X - \lambda_j)$. Soit v un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ_i. L'image de v par $\pi(f)$ est :

$$\pi(f)(v) = \left(\prod_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) \right) v = 0 \; .$$

Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres. Si un endomorphisme s'annule sur tous les éléments d'une base, il est identiquement nul. Donc le polynôme π est annulateur, donc multiple de π_f. Or par la proposition précédente, π divise π_f. Donc $\pi = \pi_f$.

Réciproquement, supposons que le polynôme minimal de f soit

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i) \; .$$

Notons E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i : $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{I})$. Nous voulons démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$. Nous avons déjà observé qu'un même vecteur ne peut pas être dans deux sous-espaces propres différents : les intersections deux à deux des sous-espaces propres sont réduites à $\{0\}$, donc la somme des E_i est directe. Nous devons simplement démontrer que tout vecteur de E est une somme de vecteurs propres. Écrivons :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \right) \frac{1}{X - \lambda_i} \; .$$

C'est la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $1/\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ (juste pour que vous sachiez d'où vient cette formule parachutée). En multipliant par le dénominateur du membre de gauche :

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \right) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j) \; .$$

Ceci est l'écriture du polynôme constant 1 sur la base des polynômes interpolateurs de Lagrange (vous n'avez pas besoin de le savoir pour comprendre la suite, c'est beau voilà tout). Posons alors pour tout $i = 1, \dots, k$:

$$\alpha_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad \text{et} \quad P_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j) \; .$$

Ainsi :

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i(X) \ .$$

Composons par f (cf. notation 1) :

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i(f) \ .$$

Donc pour tout vecteur $v \in E$:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i(f)(v) \ .$$

Il nous reste à démontrer que pour tout $i = 1, \dots, n$, $P_i(f)(v) \in E_i$. Par hypothèse, $\pi_f(X) = (X - \lambda_i)P_i(X)$. Donc :

$$\pi_f(f)(v) = (f - \lambda_i \mathrm{I})(P_i(f)(v)) = 0 \ .$$

Nous avons démontré que tout vecteur de E s'écrit comme somme de vecteurs des sous-espaces propres. Donc E est la somme des sous-espaces propres. Nous savions déjà que la somme des E_i est directe, donc $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$. □

Voici quelques exemples pour terminer cette section.

Définition 9. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $E = F \oplus G$: tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

$$\forall u \in E \ , \ \exists!(v, w) \in F \times G \ , \quad u = v + w \ .$$

- *La* projection *sur F parallèlement à G est l'application p qui à u associe $p(u) = v$.*
- *La* symétrie *par rapport à F parallèlement à G est l'application s qui à u associe $s(u) = v - w$.*

La figure 1 vous aidera à visualiser cette définition.

Proposition 6. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimensions respectives k et $n-k$, tels que $E = F \oplus G$. La projection p et la symétrie s sur F parallèlement à G sont diagonalisables. Leurs polynômes minimaux et caractéristiques sont :*

$$P_p(X) = (-1)^n X^{n-k}(X-1)^k \quad \textit{et} \quad \pi_p(X) = X(X-1)$$

$$P_s(X) = (-1)^n (X+1)^{n-k}(X-1)^k \quad \textit{et} \quad \pi_s(X) = (X+1)(X-1)$$

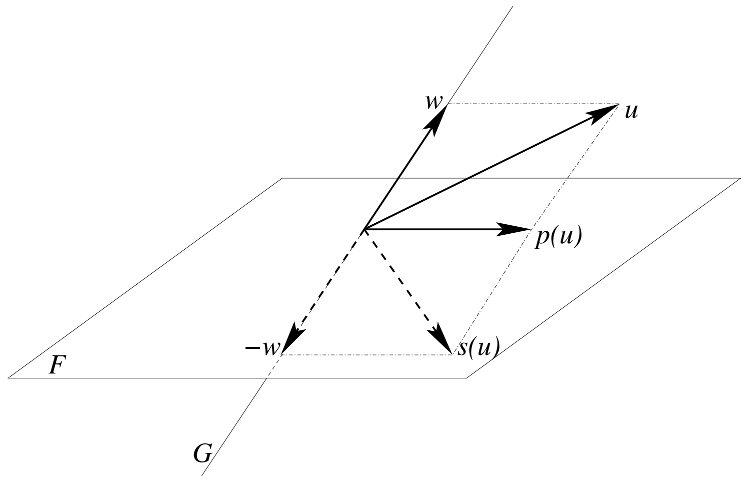

FIGURE 1 – Somme directe $E = F \oplus G$, projection sur F, et symétrie par rapport à F.

Démonstration : Formons une base de E en concaténant une base de F et une base de G. Les matrices de p et s dans cette base sont diagonales :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les polynômes caractéristiques s'en déduisent immédiatement. Les polynômes minimaux aussi, en utilisant le théorème précédent : il n'y a que deux valeurs propres, 1 et 0 pour la projection, 1 et –1 pour la symétrie. On peut aussi observer que la projection vérifie $p \circ p = p$, soit $p^2 - p = 0$; la symétrie vérifie $s \circ s = \mathrm{I}$, soit $s^2 - \mathrm{I} = 0$. □

Définition 10. *On dit qu'un endomorphisme f est nilpotent d'indice k si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$.*

Proposition 7. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice k. Son polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$, son polynôme minimal est X^k. Si $k > 1$, f n'est pas diagonalisable.*

Démonstration : Puisque X^k est un polynôme annulateur, le polynôme minimal divise X^k. Mais comme $f^{k-1} \neq 0$, π_f ne peut pas être de degré inférieur à k. Donc $\pi_f = X^k$. L'endomorphisme f n'a pas d'autre valeur propre que 0, donc le polynôme caractéristique est multiple de X^n. □

Proposition 8. *Soit f un endomorphisme tel que sa matrice dans une certaine base soit :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P_f(X) = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0) .$$

Son polynôme minimal est :

$$\pi_f(X) = (-1)^n P_f(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0 .$$

La matrice A est appelée *matrice de Frobenius* ou *matrice compagnon* du polynôme $P_f = (-1)^n \pi_f$.

Démonstration : Le calcul du polynôme caractéristique s'effectue en développant selon la première ligne pour faire apparaître une formule de récurrence ; nous vous le laissons en exercice, si vous ne l'avez pas déjà vu dans le chapitre « Déterminants ». Considérons la base $(e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de f est A. Par définition,

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = f^2(e_1) = e_3, \dots, f(e_{n-1}) = f^{n-1}(e_1) = e_n .$$

Soit $P(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme quelconque, de degré au plus $n-1$. Alors :

$$P(f)(e_1) = b_0 e_1 + b_1 f(e_1) + \dots + b_{n-1} f^{n-1}(e_1) = b_0 e_1 + b_1 e_2 + \dots + b_{n-1} e_n .$$

Si P est un polynôme annulateur de f, alors $P(f)(e_1) = 0$, mais comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, ceci entraîne que $b_0 = \dots = b_{n-1} = 0$. Un polynôme annulateur de degré strictement inférieur à n est nul. Tout polynôme annulateur non nul est donc de degré supérieur ou égal à n, donc multiple de P_f (cf. proposition 4). □

1.4 Réduction de Jordan

Cette section dépasse nettement le niveau de ce cours, et nous vous demandons d'admettre les résultats principaux. La réduction de Jordan est ce qu'on peut faire de mieux pour une matrice non diagonalisable. Même si elle est difficile à décrire précisément, et si les justifications théoriques sont hors de votre portée pour l'instant, il est bon de savoir que derrière la fonction « Jordan » des logiciels de calcul formel se cache une méthode utile et puissante. Soyons réalistes : nous ne vous demanderons pas de calculer à la main une forme réduite de Jordan en dimension supérieure à 4, il y a des logiciels pour cela. Nous nous contenterons donc de vous indiquer la démarche sur des exemples en dimension réduite.

Nous avons vu précédemment que les endomorphismes nilpotents ne sont pas diagonalisables. Le théorème suivant (admis) montre que tout endomorphisme se décompose en une partie diagonalisable et une partie nilpotente.

Théorème 6 (décomposition de Dunford)**.** *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Il existe un couple (g, h) unique d'endomorphismes de E tels que :*

- *g est diagonalisable et h est nilpotent,*
- *g et h commutent,*
- *$f = g + h$.*

C'est donc dans les endomorphismes nilpotents que réside la difficulté. Certes, ils ne sont pas diagonalisables, mais on peut néanmoins simplifier leur forme matricielle. La proposition suivante vous explique comment, pour le cas particulier où l'indice est maximal.

Proposition 9. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice n dans un espace vectoriel E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est trangulaire supérieure, les termes au-dessus de la diagonale valant 1, les autres étant nuls. Cette matrice s'appelle « bloc de Jordan » d'ordre n.*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Par hypothèse, f^{n-1} est non nul, donc il existe $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$. Nécessairement les n vecteurs $f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \dots, f(v), v$ sont tous non nuls. Nous allons montrer qu'ils forment une famille libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que

$$\alpha_1 f^{n-1}(v) + \alpha_2 f^{n-2}(v) + \cdots + \alpha_{n-1} f(v) + \alpha_n v = 0$$

Prenons l'image par f^{n-1}, et utilisons le fait que $f^m = 0$ pour $m \geqslant n$: $\alpha_n f^{n-1}(v) = 0$, donc $\alpha_n = 0$. On itère alors en composant avec f^{n-i-1} pour obtenir que $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Les n vecteurs $f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \dots, f(v), v$ forment une famille libre, donc une base puisque l'espace est de dimension n. La matrice de f dans cette base est bien J_n. □

Dans le cas général, un endomorphisme nilpotent admet une réduction du même type, mais il est beaucoup plus difficile de l'écrire précisément : c'est encore une matrice triangulaire supérieure, les termes au-dessus de la diagonale valent 1 ou 0, les autres termes sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \forall i = 1, \dots, n-1\,,\ b_i = 0 \text{ ou } 1\,.$$

Proposition 10. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice k dans un espace vectoriel E de dimension n. Il existe des entiers $n_1, \dots, n_h$ tels que $n_1 + \cdots + n_h = n$, et une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont $J_{n_1}, \dots, J_{n_h}$.*

Démonstration : Nous allons le démontrer par récurrence sur l'indice de f. Pour $k = 1$, f est identiquement nul, et il n'y a rien à démontrer. Supposons que la propriété soit vraie pour k et démontrons-la si f est un endomorphisme d'indice $k + 1$. L'endomorphisme f de E dans E induit un endomorphisme de $f(E)$ dans $f(E)$. C'est un endomorphisme nilpotent d'indice k. Par hypothèse de récurrence $f(E) = \bigoplus_{i\in I} F_i$: chaque F_i admet une base de la forme $\big(v_i, f(v_i), \dots, f^{k_i-1}(v_i)\big)$ où v_i est un vecteur de $f(E)$ d'indice k_i, et donc $v_i = f(w_i)$ pour un vecteur w_i de E de d'indice $k_i + 1$. La famille $\big(f^\delta(v_i)\big)_{i\in I, 0\le\delta\le k_i-1}$ est une base de $f(E)$ et donc la sous-famille $\big(f^{k_i}(w_i)\big)_{i\in I}$ est libre. Mais elle est constituée de vecteurs qui appartiennent au noyau de f. Ajoutons à cette famille de nouveaux vecteurs notés w_j pour $j \in J$ (avec $J \cap I = \emptyset$) de sorte que la famille $(w_\mu)_{\mu\in I\cup J}$ soit une base du noyau de f. Décidons que $k_\mu = 0$ si $\mu \in J$ et posons $L = I \cup J$. Alors la famille $\big(f^\delta(w_\mu)\big)_{\mu\in L, 0\le\delta\le k_\mu}$ est une base de E par construction. Dans cette base, la matrice qui représente f a la forme correspondante à l'énoncé pour $k + 1$, d'où le résultat par récurrence. □

La décomposition de Dunford et la forme réduite des endomorphismes nilpotents conduisent à la *réduction de Jordan* (théorème admis).

Théorème 7 (réduction de Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe des entiers $n_1, \dots, n_h$ tels que $n_1 + \cdots + n_h = n$, et une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\lambda I + J_{n_i}$, où λ est une valeur propre de f.*

L'algorithme de calcul de la réduction de Jordan est le suivant.

1. Factoriser le polynôme caractéristique
2. Trouver une base de chaque sous-espace propre
3. *Compléter cette base s'il y a lieu*
   Si la multiplicité de la valeur propre λ est m alors qu'il n'y a que $l < m$ vecteurs propres indépendants, il faut trouver encore $m - l$ vecteurs. Pour chaque vecteur propre v déjà trouvé, vous allez résoudre le système $(A - \lambda I)w = v$, où v est un vecteur propre déjà écrit. Vous devrez vérifier que la solution w est linéairement indépendante des vecteurs déjà écrits. S'il manque encore des vecteurs, vous résoudrez le système $(A - \lambda I)u = w\dots$ Rassurez-vous, vous n'aurez pas à itérer trop longtemps pour obtenir une base de E.
4. Calculer l'inverse de P
5. Vérifier vos calculs

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $(X+1)^2$. Il a une racine double $\lambda = -1$, et la matrice $A - \lambda I = A + I$ est de rang 1.

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pour compléter en une base de $\mathbb{R}^2$, cherchons v_2, indépendant de v_1, et tel que $(A+I)v_2 = v_1$: par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Comme $Av_1 = -v_1$ et $Av_2 = v_1 - v_2$, la matrice dans la base (v_1, v_2) a bien la forme souhaitée.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $X(X-1)^2$. Trouver un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre 0, puis un vecteur propre v_2 associé à la valeur propre 1. Le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1. Pour trouver v_3, il faut chercher une solution de $(A-I)v_3 = v_2$, et s'assurer que (v_1, v_2, v_3) forme bien une base.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un dernier exemple pour la route ?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $(2-X)^3$. Le sous-espace propre associé la valeur propre 2 est engendré par $v_1 = {}^t\!(1,-1,1)$. Une solution du système $(A-2I)v_2 = v_1$ est $v_2 = {}^t\!(1,-1,0)$. Une solution du système $(A-2I)v_3 = v_2$ est $v_3 = {}^t\!(1,0,1)$. Les trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment bien une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5 Applications

Puissances d'une matrice.

Si deux matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, alors il en est de même de A^n et B^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et également de A^{-n} et B^{-n} si cet endomorphisme est inversible.

$$P^{-1}AP = B \implies P^{-1}A^nP = B^n \;, \quad \forall n \in \mathbb{N} \;.$$

La puissance n-ième d'une matrice diagonale s'écrit immédiatement. Pour un bloc de Jordan, ce n'est pas beaucoup plus compliqué. Nous vous laissons vérifier que pour $k = 1, \dots, n-1$, J_n^k est la matrice dont les termes de la forme $a_{i,i+k}$ sont égaux à 1, les autres étant nuls. Pour $k \geqslant n$, $J^k = 0$. Par la formule du binôme de Newton, on en déduit l'expression de $(\lambda I + J)^k$. On peut donc écrire explicitement la puissance k-ième d'une réduction de Jordan. Cependant, nous ne vous conseillons pas cette méthode, car il est plus facile d'utiliser le théorème de Cayley-Hamilton : $P_A(A) = 0$. Reprenons notre premier exemple, une matrice A dont les 3 valeurs propres sont $1, -1, 2$. Le polynôme caractéristique est $-X^3 - 2X^2 + X + 2$. Vous en déduisez donc que $-A^3 -$

$2A^2 + A + 2I$ est la matrice nulle. Non seulement A^3, mais toutes les puissances de A sont des combinaisons linéaires des trois matrices I, A, A^2. En effet :

$$A^3 = -2A^2 + A + 2I \implies A^4 = -2A^3 + A^2 + 2A = 5A^2 - 4I \; .$$

Ainsi vous pouvez calculer de proche en proche toutes les puissances positives de A. Mais aussi :

$$A(A^2 + 2A - I) = 2I \implies A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 + 2A - I) \; ,$$

donc toutes les puissances négatives de A sont aussi des combinaisons linéaires de I, A, A^2.

Algorithme de calcul du polynôme minimal.
Il y a deux manières de voir un polynôme annulateur : comme un polynôme de matrices qui s'annule pour $X = A$, ou bien comme une combinaison linéaire nulle des puissances de A : le théorème de Cayley-Hamilton affirme que la famille des $(n + 1)$ matrices $(I, A, A^2, \ldots, A^n)$, considérée comme famille dans un espace vectoriel de dimension n^2, est une famille liée. Ceci est la base de l'algorithme de calcul du polynôme minimal par la méthode du pivot de Gauss, qui est utilisé dans les logiciels. Toute combinaison linéaire nulle et non triviale des matrices $(I, A, A^2, \ldots, A^n)$ correpond à un polynôme annulateur de A. Si nous effectuons cette recherche avec des puissances de A les plus petites possibles, comme il existe un et un seul polynôme annulateur unitaire de degré minimal (proposition 4), nous en déduisons un moyen systématique pour trouver le polynôme minimal de A. Une manière naturelle de procéder est de considérer les matrices $I, A \ldots, A^n$ comme vecteurs de $\mathbb{R}^{n^2}$, de les disposer en ordre croissant des puissances et d'effectuer la mise sous forme échelonnée de ces $(n + 1)$ vecteurs, en s'interdisant de permuter des lignes, en ne s'autorisant que des permutations de colonnes pour pouvoir avancer dans la recherche de pivots non nuls par la méthode de Gauss. Quand la mise sous forme échelonnée est faite, la première ligne qui ne présente que des 0, (à un coefficient scalaire multiplicatif près) contient la combinaison linéaire des vecteurs de départ faisant intervenir les plus basses puissances possibles de A. Elle contient donc le polynôme minimal. Pour mémoriser les opérations effectuées pendant la mise sous forme échelonnée par la méthode de Gauss, ajoutons une dernière colonne contenant $1, X, X^2 \ldots$ et effectuons aussi sur cette colonne les opérations élémentaires de la méthode de Gauss. Nous aurons alors dans cette colonne pour la première ligne ne contenant que des 0, à un coefficient multiplicatif près, l'expression du polynôme minimal de A, non factorisé.

Voici un exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Formons le premier tableau de la méthode. Pour i allant de 0 à 3, on trouve sur la ligne

i les 9 coefficients de la matrice A^i, suivis de X^i.

1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	-1	2	0	-1	1	1	X
-1	2	0	-2	3	0	-2	2	1	X^2
-2	3	0	-3	4	0	-3	3	1	X^3

Dans le second tableau, des combinaisons linéaires de lignes annulent les coefficients de la première colonne après le premier.

1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	-1	2	0	-1	1	1	X
0	2	0	-2	4	0	-2	2	2	X^2+1
0	3	0	-3	6	0	-3	3	3	X^3+2

Dans le troisième tableau, on annule les coefficients de la seconde colonne, après les 2 premiers.

1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	-1	2	0	-1	1	1	X
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$(X^2+1)-2X$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$(X^3+2)-3X$

Donc $\pi(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est le polynôme minimal de A. Nous obtenons aussi que $X^3 - 3X + 2 = (X+2)(X-1)^2$ est annulateur, ce qui n'est pas très utile : le facteur $(X+2)$ est parasite et nous ne cherchons pas à utiliser l'information (sans intérêt pour nous) associée. Au vu du polynôme minimal, nous voyons que A admet 1 comme seule valeur propre et la réduction de Jordan de A fera intervenir un bloc J_2 et un bloc J_1. La mise sous forme de Jordan est particulièrement simple ici parce que $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2$ pour $\lambda = 1$ est $E = \mathbb{R}^3$ tout entier. Prenons donc un vecteur dans E, « au hasard » $(1,0,0)$, formons $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $(A-I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $(A-I)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Donc $((-1,-1,-1),(1,0,0))$ peut être choisi pour constituer la base associée au bloc de longueur 2. En lui ajoutant le vecteur $(0,0,1)$, vecteur propre évident, non colinéaire à $(-1,-1,-1)$, nous savons que dans la base $((-1,-1,-1),(1,0,0),(0,0,1))$ l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sera représenté par

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Systèmes différentiels linéaires.

La réduction des endomorphismes est très utilisée dans la résolution des systèmes linéaires d'équations différentielles :

$$Y'(t) = A\,Y(t)\ , \tag{E}$$

où Y est une fonction (inconnue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice de réels, carrée de taille n. Nous allons voir comment, d'abord d'un point de vue théorique.

Dans le cas particulier $n = 1$, la matrice est réduite à un scalaire a, et la solution de $y'(t) = ay(t)$, partant de y_0 à l'instant 0 est :

$$y(t) = \mathrm{e}^{at} y_0\ .$$

On peut définir e^{at} comme la somme de la série entière, de rayon de convergence infini, $\sum a^n t^n/n!$. Sa dérivée est :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n = a \sum_{m\geqslant 0} \frac{t^m}{m!} a^m\ .$$

Cette écriture formelle reste valable en dimension n. Pour trouver une solution à l'équation (E), il suffit d'écrire de manière analogue
$Y(t) = (\sum (t^n/n!)A^n)Y(0)$. Encore faut-il s'assurer que cette série entière, à coefficients matriciels, converge, ce que nous admettrons.

Proposition 11. *Soit $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La série suivante converge dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:*

$$I + M + \frac{1}{2!}M^2 + \cdots + \frac{1}{k!}M^k + \cdots\ .$$

La somme de cette série est appelée exponentielle *de la matrice M et notée* $\exp(M)$.

L'exponentielle de matrice a des propriétés comparables à l'exponentielle ordinaire. En particulier :

Proposition 12. *Si deux matrices M_1 et M_2 commutent, alors :*

$$\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2)\ .$$

La propriété qui nous intéresse est la suivante :

Proposition 13. *Soit $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA)\ .$$

Il s'ensuit immédiatement que $Y(t) = \exp(tA)y_0$ est solution de (E), pour $Y(0) = y_0$. Le résultat suivant relie les coefficients de $\exp(tA)$ aux valeurs propres de la matrice A.

Théorème 8. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A (réelles ou complexes), et pour tout $i = 1, \dots, k$, notons m_i la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de A. Pour tout $j = 0, \dots, m_i - 1$, notons $f_{i,j}$ la fonction (réelle ou complexe), définie par :*

$$f_{i,j}(t) = t^j \mathrm{e}^{\lambda_i t} .$$

Alors tous les coefficients de la matrice $\exp(tA)$*, de même que ceux de toute solution de* (E) *sont combinaison linéaire des $f_{i,j}(t)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 0, \dots, m_i - 1$.*

Démonstration : Nous utiliserons la réduction de Jordan de la matrice A :

$$J(A) = P^{-1}AP .$$

La matrice $J(A)$ est une matrice diagonale par blocs. À chaque valeur propre λ_i de A est associé un bloc B_i, qui est la somme de $\lambda_i I$ et d'un bloc nilpotent N_i dont la puissance m_i-ième est nulle. Sur la définition de l'exponentielle, il est facile de vérifier que :

$$\exp(PMP^{-1}) = P \exp(M) P^{-1} .$$

De plus si M est diagonale par blocs, alors $\exp(M)$ l'est aussi et ses blocs sont les exponentielles des blocs de M. Ces observations montrent que les coefficients de $\exp(tA)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients des $\exp(tB_i)$. Or :

$$\exp(tB_i) = \exp(\lambda_i tI + tN_i) = \exp(\lambda_i tI)\exp(tN_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\exp(tN_i) .$$

La matrice N_i est constituée de blocs de Jordan J_m de dimension $m \leqslant m_i$. On obtient :

$$\exp(tJ_m) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ & & & & t \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

d'où le résultat. □

Exemple 1.
Considérons la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Sa forme de Jordan est :

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

L'exponentielle de $tJ(A)$ est :

$$\exp(tJ(A)) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Si $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ est solution du système ci-dessous, les fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ sont nécessairement des combinaisons linéaires de e^{2t}, e^{4t} et te^{4t}.

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) + y_2(t) - y_3(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_1(t) + 2y_3(t) . \end{cases}$$

Par exemple la solution du système pour $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$ est :

$$\begin{cases} y_1(t) & = & e^{4t} + te^{4t} \\ y_2(t) & = & (1/2)e^{2t} + (1/2)e^{4t} \\ y_3(t) & = & (1/2)e^{2t} + (1/2)e^{4t} + te^{4t} . \end{cases}$$

Après avoir résolu un système différentiel linéaire à coefficient constants avec une démarche théorique utilisant l'exponentielle de la matrice du système, voyons comment dans la pratique on effectue cette recherche, et refaisons le chemin sur des exemples. (Les répétitions avec ce qui précède sont volontaires).

Exemple 2.
Nous voulons résoudre le système différentiel (réel)

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t) + 3y(t) \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) \end{cases}$$

où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions inconnues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et cela connaissant $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et cherchons à diagonaliser A. Calculons donc son polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) .$$

Comme ce polynôme caractéristique admet deux racines distinctes (de multiplicité 1), nous savons que nous pourrons diagonaliser A.

Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_1 = 2$. Il faut résoudre

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 1 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

d'où $x = 3y$ et donc $(x, y) = y(3, 1)$ et donc $\{(3, 1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I)$.

Recherchons le sous espace propre associé à $\lambda_1 = -2$. Il faut résoudre

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

d'où $x+y=0$ et donc $(x,y) = x(1,-1)$ et donc $\{(1,-1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A+2I)$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En termes de système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = DP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Posons donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & 2X(t) \\ Y'(t) & = & -2Y(t) \end{array} \right.$$

Ainsi la diagonalisation a découplé les nouvelles fonctions inconnues. Il existe deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que $X(t) = k_1 \mathrm{e}^{2t}$ et $Y(t) = k_2 \mathrm{e}^{-2t}$. En revenant à la définition de X et de Y

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Pour $t = 0$ il reste

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La solution du système est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{3x_0 + 3y_0}{4} \mathrm{e}^{2t} + \dfrac{x_0 - 3y_0}{4} \mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) & = & \dfrac{x_0 + y_0}{4} \mathrm{e}^{2t} - \dfrac{x_0 - 3y_0}{4} \mathrm{e}^{-2t} \end{array} \right.$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} & \frac{3}{4}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

La matrice

$$R(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} & \frac{3}{4}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}) & \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

vérifie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) = A\,R(t)$ et $R(0) = I$. C'est l'exponentielle de At. On la nomme *résolvante du problème de Cauchy* consistant à trouver la solution du système connaissant sa valeur en $t = 0$. Cette solution du système est donnée explicitement en fonction des conditions initiales (x_0, y_0). Au passage, nous avons obtenu une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et nous pourrions démontrer ainsi l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy. Cela ne survient que parce que le système est linéaire à coefficients constants (sinon le domaine de définition de la solution n'est pas $\mathbb{R}$, a priori). Noter que les coefficients constants interviennent de manière cruciale dans

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = P^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Si les coefficients de la matrice A ne sont pas constants n'utilisez pas la diagonalisation !

Exemple 3.
Considérons le système

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\ x'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$$

où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions inconnues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et cela connaissant $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et cherchons à diagonaliser A. Calculons donc son polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 + 1 .$$

Comme le polynôme caractéristique n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$, la méthode précédente semble tomber à l'eau.

Nous pourrions décider de passer dans $\mathbb{C}$. Pour cela factorisons $P_A(\lambda)$ comme polynôme à coefficients complexes.

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2 - \mathrm{i})(\lambda - 2 + \mathrm{i})$$

et nous obtenons deux racines complexes $\lambda_1 = 2+\mathrm{i}$ et $\lambda_2 = 2-\mathrm{i}$ de multiplicité 1. Nous pourrions donc diagonaliser comme dans l'exemple de la rotation en passant dans $\mathbb{C}^2$. Qu'obtiendrait-on ? Une fois tous les calculs faits nous aurions

$$\begin{cases} x(t) = A\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} + B\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t} \\ y(t) = C\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} + D\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t} \end{cases}$$

où A, B, C et D sont des constantes complexes reliées par deux relations.

Comme nous manquons de courage pour ces calculs, nous allons procéder à l'envers, en faisant la remarque suivante : oui il y a bien un moyen de soutirer de la résolution complexe la résolution réelle, en regroupant de manière astucieuse les vecteurs propres complexes associés à une valeur propre complexe et à sa conjuguée (comme le polynôme caractéristique est à coefficients réels, si un complexe est racine, alors son complexe conjugué aussi). Cela aura comme conséquence de choisir A et B de sorte que x devienne réel et aussi C et D de sorte que y deviennent réel. Autrement dit la solution réelle sera de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\mathrm{e}^{2t}\cos t + b\mathrm{e}^{2t}\sin t \\ y(t) = c\mathrm{e}^{2t}\cos t + d\mathrm{e}^{2t}\sin t \end{array}\right.$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles reliées par deux relations. (Attention a n'est pas la partie réelle de A...) Concrètement il y a deux racines complexes $2+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$, il faut séparer la partie réelle donnant e^{2t} et la partie imaginaire pure donnant $\cos t$ et $\sin t$). Mais je n'ai toujours pas les relations en question puisque je n'ai pas fait les calculs, direz vous ! Oui, mais puisque nous savons que la solution sera de cette forme, pourquoi ne pas faire les calculs à l'envers et reporter la forme ci-dessus dans le système de départ ? Ainsi, nous aurons les relations recherchées, et nous n'aurons pas besoin d'effectuer la diagonalisation complexe ! De fait les calculs sont beaucoup plus rapides et simples, et conduisent bien au résultat.

Nous utilisons donc la diagonalisation complexe uniquement pour connaître la forme de la solution, mais ce passage est crucial.

Si a, b, c et d sont 4 constantes réelles, reportons donc la forme indiquée dans le système initial brut.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) &=& \mathrm{e}^{2t}((2a+b)\cos t + (2b-a)\sin t) \\ y'(t) &=& \mathrm{e}^{2t}((2c+d)\cos t + (2d-c)\sin t) \end{array}\right.$$

devrait donner

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) &=& 2x-y = \mathrm{e}^{2t}((2a-c)\cos t + (2b-d)\sin t) \\ y'(t) &=& x+2y = \mathrm{e}^{2t}((a+2c)\cos t + (b+2d)\sin t) \end{array}\right.$$

et nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+b = 2a-c \\ 2b-a = 2b-d \\ 2c+d = a+2c \\ 2d-c = b+2d \end{array}\right.$$

ou encore $b=-c$, $a=d$ donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& a\mathrm{e}^{2t}\cos t + b\mathrm{e}^{2t}\sin t \\ y(t) &=& -b\mathrm{e}^{2t}\cos t + a\mathrm{e}^{2t}\sin t \end{array}\right.$$

et pour $t=0$, $\left\{\begin{array}{l} x_0 = a \\ y_0 = -b \end{array}\right.$. La solution du système est donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& \mathrm{e}^{2t}(x_0\cos t - y_0\sin t) \\ y(t) &=& \mathrm{e}^{2t}(y_0\cos t + x_0\sin t) \end{array}\right.$$

ou encore mieux

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t & -\mathrm{e}^{2t}\sin t \\ \mathrm{e}^{2t}\sin t & \mathrm{e}^{2t}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

La matrice

$$R(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t & -\mathrm{e}^{2t}\sin t \\ \mathrm{e}^{2t}\sin t & \mathrm{e}^{2t}\cos t \end{pmatrix}$$

vérifie $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = AR$ et $R(0) = I$. Elle est la *résolvante* du problème de Cauchy posé initialement.

Comme vous l'avez constaté sur l'exemple ci dessus, la réduction à la forme diagonale a été cruciale pour connaître la forme de la solution d'un système réel $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY$, où A est une matrice constante. Et si la matrice A n'est pas diagonalisable ? Comme nous disposons de la réduction de Jordan et que nous avons compris théoriquement la démarche à effectuer nous avons (sans nous en rendre compte) justifié la démarche pratique proposée souvent par les physiciens.

Recette pratique.
Soit à résoudre $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY$, où $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)$ est un n-uplet de fonctions inconnues et A est une matrice constante.

1. Trouver les valeurs propres réelles ou complexes et leurs multiplicités : mettons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_k$ sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - XI)$ (avec $n = m_1 + \cdots + m_k$).
2. Trouver les dimensions des sous espaces propres $1 \leqslant s_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) \leqslant m_i$.
3. Séparer les valeurs propres réelles des valeurs propres complexes.
4. À une valeur propre réelle, mettons λ_j, on associe $t \mapsto e^{\lambda_j t}\Gamma_j(t)$ où $\Gamma_j(t)$ est un polynôme réel de degré $m_j - s_j$.
5. Chaque valeur propre complexe doit être associée à la valeur propre complexe conjuguée (qui est aussi valeur propre puisque le polynôme caractéristique est à coefficients réels). Disons $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ et $\overline{\lambda}_j = a_j - \mathrm{i}b_j$: à ce couple on associe les fonctions $t \mapsto (\Gamma_j(t)\cos b_j t + \Delta_j(t)\sin b_j t)\mathrm{e}^{a_j t}$où Γ_j et Δ_j sont des polynômes réels de degré $m_j - s_j$. Ce faisant on introduit trop de constantes réelles !
6. On reporte dans le système initial la somme des fonctions génériques introduites dans 4) et 5), *mais* pour chaque fonction inconnue, on introduit des constantes différentes. (Comme on ne possède pas la matrice de passage de la base canonique à une base qui réduit l'endomorphisme, cela revient à prendre les coefficients de la matrice $P^{-1}TP$ où T est la forme réduite de l'endomorphisme de manière quelconque, en ne retenant que l'idée que chaque élément sera une combinaison linéaire des fonctions génériques de 4) et 5) et donc chaque fonction inconnue aussi). On en introduit donc beaucoup trop ! On constate que le nombre de constantes introduites est bien n la dimension du système, une fois toutes les équations du système vérifiées. La recette dit que cela marche sans expliquer pourquoi ! Il faut

pour cela résoudre les systèmes linéaires obtenus (en identifiant les coefficients des fonctions génériques qui forment un système libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle) et ramener le nombre de constantes à n.

7. On a obtenu la forme de la solution générale dépendant de n constantes réelles, on y fait $t = 0$ et on extrait l'expression de ces constantes en fonction des conditions initiales (cela peut être redoutable si n est grand, uniquement possible numériquement et/ou de manière approchée !).

(fin de la recette)

Dans la recette précédente, *rien n'est démontré*, on affirme simplement que cela marche, mais c'est une conséquence du théorème 8 comme expliqué au dessus ! En fait la recette reste dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, introduit beaucoup trop de constantes, puis en vérifiant le système « à l'envers », calcule directement le produit $P^{-1}TP$ qui donne la solution générale, et cela dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, sans avoir besoin de calculer la matrice de passage P, ni T ni P^{-1} , ni la solution générale dans la nouvelle base, ni le retour à l'ancienne base ! C'est pour cela que la recette est rapide et efficace. Pour la justifier il faut simplement démonter la formule $A = P^{-1}TP$ avec T sous forme de Jordan (pensez à triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls uniquement sur la diagonale et sur la « diagonale juste au dessus »), puis refaire le passage réels$\to$complexes$\to$réels comme expliqué dans l'exemple 3.

De plus on peut aussi sauter l'étape 2 et prendre les polynômes Γ_j et Δ_j de degré $m_j - 1 \geqslant m_j - s_j$. On introduit alors encore d'autres constantes inutiles. Les systèmes linéaires obtenus, de taille plus grande, vont rendre nulles ces constantes inutiles, ce qui embrouille souvent la compréhension de ce que l'on fait. C'est souvent la méthode présentée par les physiciens. Cela revient à utiliser $P^{-1}TP$ avec T sous forme triangulaire supérieure, sans essayer à savoir si T peut être mise sous une forme plus intrinsèque, décomposant $\mathbb{R}^n$ en sous espaces stables par A. Comme le comportement du système différentiel, localement et globalement est profondément lié à cette décomposition en sous espaces stables, décortiquer le comportement du système différentiel demande de comprendre la décomposition de Jordan. Cela revient à décomposer le système en un certain nombre de sous-systèmes indépendants et analyser le comportement de chacun des sous-systèmes possibles, ceux qui correspondent à la découverte de Jordan.

Exemple 4.
On veut résoudre le problème de Cauchy, consistant à trouver
$(x(t), y(t), z(t))$ définies sur $[0, t_{\max}[$, telles que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ et

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $P_A(X) = (2-X)^2(1-X)$. Recherchons donc les fonctions inconnues comme combinaisons linéaires proposées par la recette

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{2t}(at+b) + c\mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{2t}(dt+e) + f\mathrm{e}^t \\ z = \mathrm{e}^{2t}(gt+h) + k\mathrm{e}^t \end{cases}$$

D'une part

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^{2t}(2at+2b+a) + c\mathrm{e}^t \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^{2t}(2dt+2e+d) + f\mathrm{e}^t \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^{2t}(2gt+2h+g) + k\mathrm{e}^t \end{cases}$$

d'autre part

$$\begin{cases} 2x+2y+3z &= (2at+2b+2dt+2e+3gt+3h)\mathrm{e}^{2t} + (2c+2f+3k)\mathrm{e}^t \\ 2y-z &= (2dt+2e-gt-h)\mathrm{e}^{2t} + (2f-k)\mathrm{e}^t \\ z &= \mathrm{e}^{2t}(gt+h) + k\mathrm{e}^t \end{cases}$$

Nous avons donc un système linéaire de trois équations. L'identification des coefficients de e^t et e^{2t} dans la troisième, puis la seconde, puis la première équation donne :

$$\begin{cases} 2g &= g \\ 2h+g &= h \\ k &= k \end{cases} \qquad \begin{cases} 2d &= 2d-g \\ 2e+d &= 2e-h \\ f &= 2f-k \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a &= 2a+2d+3g \\ 2b+a &= 2b+2e+3h \\ c &= 2c+2f+3k \end{cases}$$

On en déduit $g = h = 0$, (ces constantes sont nulles parce que le système initial était triangulaire supérieur, pas parce que l'on avait sauté l'étape deux, qui donnerait ici le même nombre de constantes) puis $f = k$ puis $d = 0$, $a = 2e$ et $c = -5k$. Il vient :

$$\begin{cases} x(t) &= \mathrm{e}^{2t}(2et+b) - 5k\mathrm{e}^t \\ y(t) &= \mathrm{e}^{2t}(e) + k\mathrm{e}^t \\ z(t) &= k\mathrm{e}^t \end{cases}$$

Pour $t = 0$ on obtient

$$\begin{cases} x_0 &= b-5k \\ y_0 &= e+k \\ z_0 &= k \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x(t) &= \mathrm{e}^{2t}(2(y_0-z_0)t + (x_0+5z_0)) - 5z_0\mathrm{e}^t \\ y(t) &= \mathrm{e}^{2t}(y_0-z_0) + z_0\mathrm{e}^t \\ z(t) &= z_0 e \end{cases}$$

La solution est donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 2t\mathrm{e}^{2t} & (-2\mathrm{e}^{2t}+5\mathrm{e}^{2t}-5\mathrm{e}^t) \\ 0 & (t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{2t}) & (-t\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2te^{2t} & (-2e^{2t}+5e^{2t}-5e^{t}) \\ 0 & (te^{2t}+e^{2t}) & (-te^{2t}-e^{2t}+e^{t}) \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

vérifie $\frac{dR(t)}{dt} = A.R$ et $R(0) = I$. C'est la *résolvante* du problème posé. Difficile de faire plus rapide pour l'obtenir !

Équations aux différences.
Pour terminer, nous allons démontrer deux résultats très proches, portant l'un sur les équations de récurrence, l'autre sur les équations différentielles. Vous connaissez déjà ces résultats dans le cas $n = 2$. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ n réels. Notons Q le polynôme

$$Q = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) \,.$$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les racines de Q, et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités.

$$Q = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} \,.$$

Théorème 9. *Considérons l'équation :*

$$(\mathcal{E}_r) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,, \quad u_{k+n} = a_0u_k + a_1u_{k+1} + \cdots + a_{n-1}u_{k+n-1} \,.$$

Toute solution de $(\mathcal{E}_r)$ *s'écrit :*

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j \lambda_i^n \,,$$

où les n coefficients $\alpha_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, m_i - 1$ *sont réels ou complexes.*

Théorème 10. *Considérons l'équation :*

$$(\mathcal{E}_d) \qquad y^{(n)}(t) = a_0y(t) + a_1y'(t) + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) \,,$$

Toute solution de $(\mathcal{E}_d)$ *s'écrit :*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} \,,$$

où les n coefficients $\alpha_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 0, \ldots, m_i - 1$ *sont réels ou complexes.*

Démonstration : Les deux problèmes ont en commun leur écriture matricielle. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$U_k = (u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{n-1+k}) \quad \text{et} \quad Y(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

Les deux équations $(\mathcal{E}_r)$ et $(\mathcal{E}_d)$ s'écrivent :

$$U_{k+1} = U_k\, A \quad \text{et} \quad Y'(t) = Y(t)\, A \;,$$

où A est la matrice compagnon du polynôme Q.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les solutions sont :

$$U_k = U_0 A^k \quad \text{et} \quad Y(t) = Y(0)\exp(tA) \;.$$

Nous avons déjà vu que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la matrice A sont tous les deux égaux à Q, au signe près. La réduction de Jordan de A est de la forme

$$P^{-1}AP = J(A) \;,$$

où $J(A)$ est une matrice diagonale par blocs. À chaque valeur propre λ_i de A est associé un bloc B_i. Ce bloc a pour taille la multiplicité m_i de λ_i dans le polynôme caractéristique. Il est la somme de $\lambda_i I$ et d'un bloc nilpotent N_i dont la puissance m_i-ième est nulle.

Pour le théorème 9,

$$A^n = P(J(A))^n P^{-1} \;.$$

Si une matrice M est diagonale par blocs, alors M^n l'est aussi et ses blocs sont les puissances n-ièmes des blocs de M. Ces observations montrent que les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires des coefficients des B_i^n. Or les puissances successives de N_i sont nulles à partir de la m_i-ième. On a :

$$\begin{aligned} B_i^n &= (\lambda_i I_{d_i} + N_i)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} N_i^j \\ &= \lambda_i^n I_{d_i} + n\lambda_i^{n-1} N_i + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{n-2}N_i^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-m_i+2)}{(m_i-1)!}\lambda_i^{n-m_i+1}N_i^{m_i-1} \;. \end{aligned}$$

Tous les coefficients de B_i^n sont donc des combinaisons linéaires de

$$\lambda_i^n, n\lambda_i^n, \dots, n^{m_i-1}\lambda_i^n \;.$$

C'est donc aussi le cas pour les coefficients de A^n.

Pour $\exp(tA)$, le raisonnement est celui de la démonstration du théorème 8. $\square$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou Faux

Vrai-Faux 1. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Toute matrice admet au moins une valeur propre, réelle ou complexe.
2. ☒ Toute matrice admet une infinité de vecteurs propres, à coordonnées réelles ou complexes.
3. ☐ Toute matrice réelle 2×2 admet une valeur propre réelle.
4. ☒ Toute matrice réelle 3×3 admet une valeur propre réelle.
5. ☐ Toute matrice réelle 2×2 admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
6. ☒ Toute matrice réelle 3×3 admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
7. ☒ Si une matrice 2×2 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors elle admet une seule valeur propre.
8. ☒ Si une matrice est triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
9. ☐ Toute matrice a au moins deux valeurs propres distinctes.
10. ☒ Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.
11. ☐ Les valeurs propres du produit de deux matrices sont les produits des valeurs propres des deux matrices.
12. ☒ Si un vecteur est vecteur propre pour deux matrices, il est vecteur propre de leur produit.
13. ☒ Les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont les mêmes.
14. ☐ Les vecteurs propres d'une matrice et ceux de sa transposée sont les mêmes.
15. ☐ Le produit d'une matrice par un de ses vecteurs propres ne peut pas être le vecteur nul.
16. ☐ Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.
17. ☒ Si une matrice $n \times n$ a n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.
18. ☐ La somme des valeurs propres d'une matrice est égale au produit de ses éléments diagonaux.
19. ☒ Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.
20. ☐ La matrice de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$ dans le plan admet des valeurs propres réelles.
21. ☒ La matrice d'une symétrie vectorielle dans le plan a pour valeurs propres $+1$ et -1.

22. ☒ Si v est vecteur propre d'une matrice, alors $-v$ est aussi vecteur propre de cette matrice.
23. ☐ Si v et w sont vecteurs propres d'une même matrice, alors $v+w$ est toujours vecteur propre de cette matrice.

Vrai-Faux 2. Soit A une matrice de taille n et λ une de ses valeurs propres. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ 0 est valeur propre de $(A-\lambda I)(A+\lambda I)$.
2. ☐ 0 et 1 sont valeurs propres de A^2-A.
3. ☒ (λ^2-1) est valeur propre de $(A-I)(A+I)$.
4. ☐ Le rang de la matrice $A-\lambda I$ est égal à $n-1$.
5. ☒ L'ensemble des solutions x du système $(A-\lambda I)x=0$ n'est pas réduit au vecteur nul.
6. ☐ Le système linéaire $Ax=\lambda y$ admet une solution x non nulle, pour tout y.
7. ☒ Le système linéaire $Ax=\lambda x$ admet une solution x non nulle.
8. ☒ La matrice des cofacteurs de $A-\lambda I$ a toutes ses lignes proportionnelles.
9. ☐ La matrice des cofacteurs de $A-\lambda I$ ne peut pas être nulle.
10. ☒ Si A est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ.
11. ☐ La dimension du sous-espace propre associé à λ est 1 si et seulement si la multiplicité de λ est 1.
12. ☒ Si la multiplicité de λ est 1, alors toutes les lignes de la matrice des cofacteurs appartiennent au sous-espace propre de A associé à λ.
13. ☐ Si la multiplicité de λ est 1, alors toutes les lignes de la matrice des cofacteurs sont des vecteurs propres de A associés à λ.

Vrai-Faux 3. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.
2. ☒ A admet 0 pour valeur propre.
3. ☒ A admet 2 pour valeur propre.
4. ☐ La somme des valeurs propres de A vaut 2.
5. ☒ Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
6. ☐ La matrice $A+I$ est de rang 2.

7. ☒ Le déterminant de $A - I$ est nul.
8. ☐ Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
9. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
10. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
11. ☐ Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
12. ☒ A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
13. ☐ A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
14. ☒ A^5 est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix}$.

Vrai-Faux 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.
2. ☒ A admet 0 pour valeur propre.
3. ☒ A admet 1 pour valeur propre.
4. ☒ A n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et 1.
5. ☒ Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
6. ☒ Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 a sa troisième coordonnée nulle.
7. ☒ La matrice $A - I$ est de rang 2.
8. ☐ 1 est valeur propre simple de A.
9. ☐ A est diagonalisable.

10. ☐ Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
11. ☒ A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
12. ☒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vrai-Faux 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.
2. ☒ A admet 0 pour valeur propre.
3. ☒ A admet 1 pour valeur propre.
4. ☒ A n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et 1.
5. ☒ Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
6. ☐ Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 a sa troisième coordonnée nulle.
7. ☐ La matrice $A - I$ est de rang 2.
8. ☐ 1 est valeur propre simple.
9. ☒ A est diagonalisable.
10. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
11. ☒ A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
12. ☒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

Vrai-Faux 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le produit des valeurs propres de A est 2.
2. ☐ A admet une valeur propre réelle.

3. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
4. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
5. ☒ Le vecteur $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
6. ☐ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est valeur propre de A.
7. ☒ $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$ est valeur propre de A.
8. ☐ Le carré de A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.
9. ☒ Le carré de l'inverse de A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}$.
10. ☐ Si les suites (u_n) et (v_n) sont solution du système $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ alors elles sont périodiques, de période 8.
11. ☒ Si les suites (u_n) et (v_n) sont solution du système $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ alors les suites $(u_n/2^{n/2})$ et $(v_n/2^{n/2})$ sont périodiques, de période 8.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Déterminer son polynôme minimal.
4. Pour $n \geqslant 2$, donner une expression de A^n en fonction de A^{n-1} et A^{n-2}.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Déterminer son polynôme minimal.
4. Pour $n \geqslant 3$, donner une expression de A^n en fonction de A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3}.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Déterminer le polynôme minimal de A.
4. Pour $n \geqslant 4$, donner une expression de A^n en fonction de A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3}, A^{n-4}.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Diagonaliser les matrices symétriques suivantes, en trouvant pour chacune une base orthonormée de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Diagonaliser les matrices symétriques suivantes, en trouvant pour chacune une base orthonormée de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer son polynôme minimal.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable
4. Calculer une décomposition de Jordan de A.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer son polynôme minimal.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable
4. Calculer une décomposition de Jordan de A.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Pour chacune des matrices A suivantes.

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer son polynôme minimal.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable

4. Calculer une décomposition de Jordan de A.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

1. Diagonaliser A.
2. En utilisant la forme diagonale de A, calculer les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire l'expression de A^2 et de A^{-1} en fonction de A et I.
4. Déduire de la question précédente l'expression de A^n en fonction de A et I pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Déterminer le noyau de la matrice A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable et donner son polynôme minimal.
4. Donner une décomposition de Jordan de A.
5. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 11. Soit A une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On suppose que A admet une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que a soit valeur propre de A^n.
   (a) Montrer que $A^n = aI$.
   (b) Montrer que l'argument de λ est un multiple de $\frac{2\pi}{n}$.

Exercice 12. Soit A une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, si et seulement si les modules des valeurs propres de A sont strictement inférieurs à 1.

Exercice 13. On considère la matrice A suivante.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Soit v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la suite $(A^n v)_{n\in\mathbb{N}}$ converge soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
3. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 14. On considère la matrice symétrique suivante, à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} .$$

1. On suppose que $a = b$. Montrer que A est diagonalisable dans la base formée des vecteurs $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{-1}$.
2. On suppose $a = 1$, $b = -1$, $c = \mathrm{i}$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Déterminer une décomposition de Jordan de A.

3. Dans le cas général, montrer que le polynôme caractéristique admet une racine double si et seulement si $c = \pm\frac{a-b}{2\mathrm{i}}$.
4. Pour $a \neq b$ et $c = \pm\frac{a-b}{2\mathrm{i}}$, montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique*. On suppose que $A^k = I$, pour un certain entier k. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 16. Soient A et B deux matrices *symétriques* à coefficients réels. On suppose que $A^3 = B^3$. Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres, les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Exercice 17. Soit a un réel non nul. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire le polynôme minimal de A. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Donner l'expression de A^n en fonction de A et I. En déduire l'expression de $\exp(A)$ en fonction de A et I.

Exercice 18. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Quel est le polynôme caractéristique de A ? Est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 19. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire le polynôme minimal de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A. Quel est son polynôme caractéristique ?
3. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible, différente de la matrice identité et telle que $A = A^{-1}$.

1. Quel est le polynôme minimal de A ? Est-elle diagonalisable ?
2. Donner en fonction de A et I l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $\exp(A)$.

Exercice 21. Soit a un réel. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Vérifier que -1 est valeur propre de A.
2. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
3. Si a est différent de -1 et 2, montrer que A est diagonalisable.
4. Pour $a = 2$, montrer que A n'est pas diagonalisable.
5. Pour $a = -1$, diagonaliser A.

Exercice 22. Soit a un réel. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix} .$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer en fonction de a la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $a+1$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 23. Soient a et b deux réels. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ab & -(a+b+ab) & a+b+1 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A (on pourra observer que A est la transposée d'une matrice compagnon).
2. Calculer l'image par A du vecteur dont les trois coordonnées valent 1.
3. Déterminer les valeur propres et les sous espaces propres de A.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24. Soient a, b et c trois réels non tous nuls. On note v le vecteur ${}^t(a, b, c)$. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} .$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est la droite vectorielle engendrée par v.
3. Donner l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
5. D'éterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
6. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, montrer que f est la projection orthogonale sur la droite engendrée par v.

Exercice 25. Soient a, b, c, d, e, f six réels. Pour chacune des matrices A suivantes, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d, e, f pour que A soit diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 26. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

1. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $A^{-1} = P(A)$.
2. On suppose que $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$. Montrer que A est inversible et diagonalisable.

Exercice 27. Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable. On considère la matrice B $2n \times 2n$, formée de 4 blocs égaux à A.

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} .$$

1. Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé.
   (a) On note V le vecteur obtenu en concaténant deux copies de v. Montrer que V est vecteur propre de B associé à la valeur propre 2λ.
   (b) On note V' le vecteur obtenu en concaténant une copie de v et une copie de $-v$. Montrer que V' est vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.
2. En déduire que B est diagonalisable.

Exercice 28. Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable. On considère la matrice B $2n \times 2n$, formée de 3 blocs nuls et un égal à A.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de B ?
2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est la matrice nulle.

Exercice 29. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^4 = f^2$.

1. Montrer que le polynôme minimal de f divise le polynôme $X^4 - X^2$.
2. Parmi les diviseurs de $X^4 - X^2$, lesquels sont des polynômes minimaux d'endomorphismes diagonalisables .
3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Exercice 30. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E, que l'on suppose diagonalisable.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
2. On suppose que f a une seule valeur propre. Quel est le polynôme caractéristique de f, quel est son polynôme minimal ? Montrer que f est une homothétie.
3. On suppose que f a deux valeurs propres, 0 et 1. Quel est le polynôme minimal de f ? Montrer que f est une projection.
4. On suppose que f a deux valeurs propres, 1 et -1. Quel est le polynôme minimal de f ? Montrer que f est une symétrie.
5. On suppose que f a deux valeurs propres disctinctes a et b. Ecrire f comme somme d'une homothétie et d'une projection, puis d'une homothétie et d'une symétrie.

Exercice 31. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit Q un élément fixé de E, de degré k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. On considère l'application f de E dans E, qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par Q.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $f^2 = f$ (f est une projection).
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes multiples de A. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E) = \mathrm{Im}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$.
6. Si $Q = X^k$, quelle est la matrice de f dans la base canonique de E ?
7. On considère le cas particulier $n = 4$, $Q = X^2 - 1$.
   (a) Donner la matrice A de f dans la base canonique de E.
   (b) Déterminer une matrice P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 32. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application f qui à un polynôme P associe $f(P) = (X - 1)P' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Pour $k \leqslant n$, quelle est l'image par f du polynôme X^k ? Écrire la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Montrer que f est un automorphisme de E et qu'il est diagonalisable.
4. Quel est le sous espace propre associé à la valeur propre 1 ?
5. Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre de f et P un vecteur propre de f associé à λ.
   (a) Montrer que 1 est racine de P.
   (b) Montrer qu'il existe un réel c tel que $P = c(X-1)^{\lambda-1}$.
   (c) Quel est le sous-espace propre associé à λ ?

Exercice 33. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application f qui à un polynôme P associe $f(P) = X^2P'' - XP'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Pour $k \leqslant n$, quelle est l'image par f du polynôme X^k ? Écrire la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer les valeurs propres de f.
4. On définit la suite de polynômes (H_k) par $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et pour tout $k \geqslant 2$, $H_n = XH_{n-1} - (n-1)H_{n-1}$. Montrer que H_k est vecteur propre de f.
5. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 34. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E. Soit A la matrice de f dans une base quelconque de E.

1. On suppose désormais que f est de rang 1. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 ?
2. On note λ la trace de A. Montrer que λ est valeur propre de f.
3. Montrer que le polynôme caractéristique de f est $P_f(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$.
4. Montrer que le polynôme minimal de f est $X(X - \lambda)$.
5. Montrer f est diagonalisable si et seulement si la trace de A est non nulle.
6. Soit v un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que v est vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ.
7. Déterminer (sans autre calcul que celui de leur trace) les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 35. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associe $f(M) = \mathrm{tr}(A)\, M - \mathrm{tr}(M)\, A$, à tr désigne la trace d'une matrice (somme des coefficients diagonaux). Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, de trace nulle.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0. Montrer que le sous-espace propres associé à la valeur propre 0 est de dimension 1.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$. Quelle est la dimension de F ?
4. Montrer que F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(A)$.
5. En déduire que f est diagonalisable, et que c'est la composée de la projection sur F parallèlement à la droite engendrée par A avec l'homothétie de rappport $\mathrm{tr}(A)$.

Exercice 36. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, qui à une matrice associe sa transposée.

1. Quel est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 ? Quelle est sa dimension ?
2. Quel est le sous espace propre de f associé à la valeur propre -1 ? Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que f est diagonalisable, donner son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Exercice 37. Soit A une matrice d'ordre 6, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$

1. Vérifier que les valeurs propres de A sont 0, 1, et 2.
2. On suppose que la trace de A est 8. Quelle sont les multiplicités de chacune des valeurs propres, quel est le polynôme caractéristique de A ?

Exercice 38. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note J la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que J est diagonalisable.
2. Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire le polynôme minimal de J, ainsi qu'une base du sous-espace propre associé à la valeur propre n.
3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note v_i le vecteur défini par :
$$v_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(J)$.
4. Soient a et b deux réels. On note A la matrice $aI + bJ$, où I désigne la matrice indentité de taille $n \times n$. Utiliser ce qui précède pour diagonaliser la matrice A.

Exercice 39. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation. On lui associe l'endomorphisme f_σ qui à e_i associe $e_{\sigma(i)}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

1. On suppose que σ est un *cycle* de longueur n. Montrer que le polynôme caractéristique de f est $(-1)^n(X^n - 1)$. En déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. On suppose que f est le produit de deux cycles de longueurs k et $n-k$, à supports disjoints. Montrer que le polynôme caractéristique de f est $(-1)^n(X^k-1)(X^{n-k}-1)$. Montrer que f est diagonalisable.
3. Dans le cas général, utiliser la décomposition de σ en produit de cycles pour montrer que f est diagonalisable.

Exercice 40. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout n, et de $\exp(At)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que $X(0) = {}^t(1, 0, -1)$.
4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = {}^t(1, 0, -1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Donner l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 41. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Donner une décomposition de Jordan pour A.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout n, et de $\exp(At)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que $X(0) = {}^t(1, 0, -1)$.
4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = {}^t(1, 0, -1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Donner l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 42. Soit (u_n) une suite de réels vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n .$$

On pose $U_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2. Diagonaliser A.
3. En déduire une expression de A^n en fonciton de n.
4. Donner l'expression de u_n en focntion de U_0, u_1, u_2 et n.

Exercice 43. Une multinationale américaine envoie chaque année un quart de ses gains américains en Europe, et autant au Japon. Le reste demeure aux États-Unis. Les filiales européennes et japonaises rendent la moitié de leurs gains aux États-Unis. Pour l'année n, on note a_n, e_n et j_n la proportion des gains restant en Amérique, en Europe et au Japon respectivement, et U_n le vecteur ${}^t\!(a_n, e_n, j_n)$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. Soit v le vecteur propre associé à la valeur propre 1, à coordonnées positives, dont la somme des coordonnées vaut 1. Calculer v.
4. Montrer que A^n converge vers la matrice dont toutes les colonnes sont égales à v, et que U_n converge vers v, quel que soit U_0.

Exercice 44. Doudou le hamster ne connaît que trois activités : dormir, manger, faire de l'exercice dans sa roue. Il peut changer d'activité à chaque minute.

- Quand il dort, il a 8 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille il a autant de chances de se mettre à manger que de faire de l'exercice.
- Chaque repas, et chaque séance d'exercice dure une minute, après quoi il s'endort.

On note d_n, m_n, e_n les probabilités qu'il a de dormir, manger et faire de l'exercice, durant la minute n, et U_n le vecteur ${}^t\!(d_n, m_n, e_n)$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. Soit v le vecteur propre associé à la valeur propre 1, à coordonnées positives, dont la somme des coordonnées vaut 1. Calculer v.
4. Montrer que A^n converge vers la matrice dont toutes les colonnes sont égales à v, et que U_n converge vers v, quel que soit U_0.

Exercice 45. On considère l'espace vectoriel E des applications continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. À tout élément f de E, on associe l'application $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(0) = f(0)$ et pour tout $x \in]0,1]$:

$$\varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Montrer que l'application φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $\lambda \in]0,1]$. on considère l'application $f_\lambda\ : x \longmapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. Calculer $\varphi(f_\lambda)$.
3. En déduire que f_λ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ.

4. Soit f un élément de E et λ un réel tel que $\varphi(f) = \lambda f$. Montrer que f est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$.
5. Montrer que cette équation n'admet de solution non nulle, prolongeable par continuité en 0 que pour $\lambda \in]0,1]$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit A une matrice 2×2, à coefficients réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si A admet une valeur propre complexe, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{B}}$ Si A admet une valeur propre réelle, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Si A admet une seule valeur propre, alors A est la matrice d'une homothétie.

$\boxed{\text{D}}$ Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, alors A admet une seule valeur propre.

$\boxed{\text{E}}$ Si A admet au moins deux vecteurs propres distincts, alors A est diagonalisable.

Question 2. Soit A une matrice 3×3, à coefficients réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, alors toutes ses valeurs propres sont distinctes.

$\boxed{\text{B}}$ Si A est triangulaire, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

$\boxed{\text{C}}$ Si A admet deux valeurs propres complexes, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{D}}$ Si A admet au moins deux valeurs propres réelles distinctes, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{E}}$ Si A est symétrique, alors toutes ses valeurs propres sont distinctes.

Question 3. Soit A une matrice de taille $n \times n$ ($n \geqslant 2$), λ une valeur propre de A et m sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

$\boxed{\text{A}}$ Si $m = 1$, alors le sous-espace propre associé à λ est une droite vectorielle.

$\boxed{\text{B}}$ La dimension du sous-espace propre associé à λ est toujours égale à m.

$\boxed{\text{C}}$ La matrice $A - \lambda I$ est de rang $n - m$.

$\boxed{\text{D}}$ Si le sous-espace propre associé à λ est une droite vectorielle, alors $m = 1$.

$\boxed{\text{E}}$ Le sous-espace propre de A associé à λ est inclus dans le sous-espace propre de A^2 associé à λ^2.

Question 4. Soit A une matrice de taille $n \times n$ ($n \geqslant 2$).

$\boxed{\text{A}}$ La somme des valeurs propres de A est nulle si et seulement si son déterminant est nul.

$\boxed{\text{B}}$ Le produit des valeurs propres de A est égal à son déterminant.

$\boxed{\text{C}}$ Les valeurs propres de A et celles de sa transposée sont les mêmes.

$\boxed{\text{D}}$ Les sous-espaces propres de A et ceux de sa transposée sont les mêmes.
$\boxed{\text{E}}$ Les sous-espaces propres de A et ceux de A^2 sont les mêmes.

Question 5. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), P_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.
$\boxed{\text{A}}$ Si f est diagonalisable, alors toutes les racines de P_f sont simples.
$\boxed{\text{B}}$ Si toutes les racines de π_f sont simples, alors f est diagonalisable.
$\boxed{\text{C}}$ Si $P_f = (-1)^n \pi_f$, alors f n'est pas diagonalisable.
$\boxed{\text{D}}$ Le degré de π_f est toujours strictement inférieur au degré de f.
$\boxed{\text{E}}$ Si P_f a n racines distinctes, alors $P_f = (-1)^n \pi_f$.

Question 6. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), P_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.
$\boxed{\text{A}}$ Si $\pi_f(X) = X^2 - X$ alors f est nilpotent.
$\boxed{\text{B}}$ Si $\pi_f(X) = X^2 - 1$ alors f est une symétrie.
$\boxed{\text{C}}$ Si f est une projection alors $\pi_f(X) = X^2$.
$\boxed{\text{D}}$ Si $\pi_f(X) = X^2$ alors f n'est pas diagonalisable.
$\boxed{\text{E}}$ Si $\pi_f(X) = X^2 - X$ alors f n'est pas diagonalisable.

Question 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\boxed{\text{A}}$ La matrice A est diagonalisable.
$\boxed{\text{B}}$ La matrice A a deux valeurs propres distinctes.
$\boxed{\text{C}}$ La polynôme minimal de A est $X^3 - X^2$.
$\boxed{\text{D}}$ Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.
$\boxed{\text{E}}$ Il existe une matrice symétrique semblable à la matrice A.

Question 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$\boxed{\text{A}}$ La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$
$\boxed{\text{B}}$ La matrice A admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
$\boxed{\text{C}}$ La somme des valeurs propres de A est égale à leur produit.
$\boxed{\text{D}}$ Si λ est valeur propre de A, la première colonne de $A - \lambda I$ est vecteur propre de A associé à λ.
$\boxed{\text{E}}$ Si v est vecteur propre de A associé à λ, alors $\overline{v}$ est vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.

Question 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$\boxed{\text{A}}$ La matrice A a trois valeurs propres distinctes.

B Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.

C La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E Le polynôme minimal de A est de degré 3.

Question 10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A La matrice A a deux valeurs propres distinctes.

B Le sous-epace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.

C La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D Le polynôme minimal de A est de degré 2.

E La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponses : 1–AD 2–BC 3–AE 4–BC 5–BE 6–BD 7–BC 8–CE 9–BD 10–AE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit n un entier supérieur ou égal à 1, E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition du polynôme caractéristique de f et énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Donner la définition du polynôme minimal de f.
3. On suppose que le polynôme caractéristique est scindé. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ses racines et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. Montrer que le polynôme minimal de f s'écrit
$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{l_i} ,$$
où pour tout $i = 1, \dots, k$, $1 \leqslant l_i \leqslant m_i$.

4. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\pi_f = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)$.
5. Montrer que si $\pi_f = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)$ alors f est diagonalisable.

Exercice 1 : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note S la matrice de taille $2n \times 2n$ dont le coefficient d'ordre (i,j) vaut 1 si $i+j = 2n+1$ et 0 sinon.

1. Vérifier que S est symétrique, en déduire qu'elle est diagonalisable.
2. Montrer que S est son propre inverse.
3. En déduire le polynôme minimal de S.
4. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note v_i et w_i les vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}$ définis par :
$$v_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 1 & \text{si } k=2n+1-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad w_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ -1 & \text{si } k=2n+1-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que v_i et w_i sont vecteurs propres de A, associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1.
5. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_n)$. Montrer que $P\,{}^tP = 2I$.
6. En déduire une diagonalisation de S dans une base orthonormée.
7. Soient a et b deux réels. On pose $A = aI + bS$, où I désigne la matrice identité de taille $2n \times 2n$. Diagonaliser A dans une base orthonormée. Quel est le polynôme caractéristique de A ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 2 : Soient a, b, c, d quatre réels tels que $bcd \neq 0$. On définit la matrice A par :
$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + {}^tA$, $A\,{}^tA$, puis $(A - XI)({}^tA - XI)$.
2. En déduire le polynôme caractéristique de A.
3. Montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $A^2 - (2a)A + (a^2+b^2+c^2)$. En déduire le polynôme minimal de A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
5. On se place désormais dans le cas où $a = 1$, $b = c = d = -1$. Vérifier que ${}^t(\mathrm{i}\sqrt{3},1,1,1)$ et ${}^t(-1,\mathrm{i}\sqrt{3},-1,1)$ sont des vecteurs propres de A.
6. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

7. Montrer que $A^3 = -8I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de A^n en fonction de A et I.
8. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = {}^t(1,1,1,1)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Donner l'expression de U_n en fonction de n.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\det(f - X\mathrm{I})$, où I désigne l'identité de E. Ses racines sont les valeurs propres de f. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On note $P(f)$ l'endomorphisme :

$$a_0\mathrm{I} + a_1f + \cdots + a_df^d = \sum_{i=0}^{d} a_if^i ,$$

où $f^0 = \mathrm{I}$ et pour tout $i \geqslant 1$, $f^i = f^{i-1} \circ f$. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $P_f(f) = 0$, où P_f désigne le polynôme caractéristique de f

2. L'ensemble des polynômes P tels que $P(f) = 0$ (polynômes annulateurs de f) contient le polynôme caractéristique, d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On démontre que tous les polynômes annulateurs sont multiples d'un même polynôme untaire, qui par définition est le polynôme minimal.
3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et la définition du polynôme minimal, celui-ci divise le polynôme caractéristique. Puisque les polynômes de degré 1 sont irréductibles,

$$\pi_f = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{l_i} ,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant l_i \leqslant m_i$. Nous devons démontrer que $l_i > 0$ pour tout i. Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i. Alors $(f - \lambda_j\mathrm{I})(v) = (\lambda_i - \lambda_j)v$, qui est nul si $i = j$, non nul $i \neq j$. Donc

$$\pi_f(v) = \left(\prod_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)^{l_j}\right) v .$$

Or par définition $\pi_f(v)$ doit être nul, donc l'exposant l_i est bien strictement positif (s'il était nul, $\pi_f(v)$ serait égal à v multiplié par un produit de termes non nuls).

4. Considérons le polynôme $\pi = \prod_{j=1}^{k}(X - \lambda_j)$. Soit v un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ_i. L'image de v par $\pi(f)$ est :

$$\pi(v) = \left(\prod_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)\right) v = 0 .$$

Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres. Si un endomorphisme s'annule sur tous les éléments d'une base, il est identiquement nul. Donc le polynôme π est annulateur, donc multiple de π_f. Or par la proposition précédente, π divise π_f. Donc $\pi = \pi_f$.

5. Notons E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i : $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{I})$. Nous voulons démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$. Un même vecteur propre ne peut pas appartenir à deux sous-espaces propres différents : les intersections deux à deux des E_i sont réduites à $\{0\}$. Il suffit donc de montrer que tout vecteur de E s'écrit comme somme de vecteurs propres. Écrivons :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \right) \frac{1}{X - \lambda_i} \; .$$

En multipliant par le dénominateur du membre de gauche :

$$1 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \right) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j) \; .$$

Posons alors pour tout $i = 1, \ldots, k$:

$$\alpha_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \quad \text{et} \quad P_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j) \; .$$

Ainsi :

$$1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i(X) \; .$$

Composons par f :

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i(f) \; .$$

Donc pour tout vecteur $v \in E$:

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i(f)(v) \; .$$

Il nous reste à démontrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $P_i(f)(v) \in E_i$. Par hypothèse, $\pi_f(X) = (X - \lambda_i) P_i(X)$. Donc :

$$\pi_f(f)(v) = (f - \lambda_i \mathrm{I})(P_i(f)(v)) = 0 \; .$$

Exercice 1 :

1. Soit $s_{i,j}$ le coefficient d'ordre (i, j) de S. Par définition, $s_{i,j}$ et $s_{j,i}$ valent 1 si $i + j = 2n + 1$, 0 sinon. Donc $s_{i,j} = s_{j,i}$: la matrice S est symétrique, donc diagonalisable, comme toutes les matrices symétriques à coefficients réels.

2. Soient i, j, k trois entiers compris entre 1 et $2n$. Par définition $s_{i,k}s_{k,j}$ vaut 1 si $i + k = j + k = 2n + 1$, et 0 sinon. Or si $i + k = j + k = 2n + 1$, alors $i = j$ et $k = 2n + 1 - i$. Donc
$$\sum_{k=1}^{2n} s_{i,j}s_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La matrice S^2 est donc la matrice identité, donc S est son propre inverse.
3. D'après la question précédente, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de S. Donc le polynôme minimal divise $X^2 - 1$. Or il n'est égal ni à $X - 1$, ni à $X + 1$ (car $S \neq \pm I$). Donc le polynôme minimal de S est $X^2 - 1$.
4. Soit $v = v(k)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{2n}$. Le terme d'ordre i du produit Sv est $\sum s_{i,k}v(k)$. Or cette somme ne contient qu'un seul terme non nul, correspondant à $i + k = 2n + 1$, soit $i = 2n + 1 - k$: le terme d'ordre i de Sv est égal au terme d'ordre $2n + 1 - i$ de v. Par définition, pour tout k, $v_i(k) = v_i(2n + 1 - k)$ et $w_i(k) = -w_i(2n + 1 - k)$. Donc $Sv_i = v_i$ et $Sw_i = -w_i$.
5. Par définition si $i \neq j$, les termes non nuls de v_i et ceux de v_j et w_j sont d'indices différents. Donc :
$${}^t v_i v_j = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)v_j(k) = 0 \quad \text{et} \quad {}^t v_i w_j = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)w_j(k) = 0 \; .$$
Pour $i = j$:
$${}^t v_i w_i = \sum_{k=1}^{2n} v_i(k)w_j(k) = 1 - 1 = 0 \; ,$$
puis
$${}^t v_i v_i = \sum_{k=1}^{2N} v_i(k)^2 = 2 \quad \text{et} \quad {}^t w_i w_i = \sum_{k=1}^{2N} w_i(k)^2 = 2 \; .$$
Si P la matrice dont les vecteurs colonnes sont $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$, le terme d'ordre (i, j) de $P\,{}^tP$ vaut 2 si $i = j$, 0 sinon. Donc $P\,{}^tP = 2I$.
6. La matrice $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}P$ est telle que $Q\,{}^tQ = \frac{1}{2}P\,{}^tP = I$. C'est donc la matrice d'un changement de base orthonormée. Comme les colonnes de P sont des vecteurs propres de S, il en est de même des colonnes de Q. Donc :
$${}^tQSQ = Q^{-1}SQ = D \; ,$$
où D est la matrice diagonale don les n premiers coefficients valent 1, les n suivants valent -1.
7. Écrivons :
$${}^tQAQ = {}^tQ(aI + bS)Q = a{}^tQQ + b{}^tQSQ = aI + bD \; .$$
La matrice $aI + bD$ est diagonale, ses n premiers coefficiants valent $a + b$ les n suivants valent $a - b$. Les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$, chacune de

multiplicité n. Donc le polynôme caractéristique de A est $(X-(a+b))^n(X-(a-b))^n$. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, et il a pour racines les deux valeurs propres distinctes. Il vaut donc $(X-(a+b))(X-(a-b))$.

Exercice 2 :

1. Si I désigne la matrice identité de taille 4×4, on trouve :
$$A+{}^tA = 2aI\ ,\quad A\,{}^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)I\ ,$$
puis
$$(A-XI)({}^tA-XI) = (X^2-2aX+(a^2+b^2+c^2+d^2))I\ .$$

2. Par définition, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X)=\det(A-XI)$. Or le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, et le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices. Donc :
$$\det\Big((A-XI)({}^tA-XI)\Big) = \det(A-XI)\det({}^tA-XI) = P_A(X)^2\ .$$
D'après la question précédente,
$$\det\Big((A-XI)({}^tA-XI)\Big) = (X^2-2aX+(a^2+b^2+c^2+d^2))^4$$
Donc :
$$P_A(X) = \pm(X^2-2aX+(a^2+b^2+c^2))^2\ .$$
Le coefficient du terme en X^4 dans le polynôme caractéristique est $(-1)^4=1$. Donc :
$$P_A(X) = (X^2-2aX+(a^2+b^2+c^2+d^2))^2\ .$$

3. Notons π le polynôme $X^2-2aX+(a^2+b^2+c^2+d^2)$. Puisque $P_A=\pi^2$, Les valeurs propres de A sont les racines de π. Par hypothèse b,c,d ne sont pas tous les trois nuls, donc
$$\pi(X) = (X-a)^2+b^2+c^2+d^2>0\ ,\quad \forall X\in\mathbb{R}\ .$$
Le polynôme π n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$: la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. On trouve $A^2-(2a)A+(a^2+b^2+c^2+d^2)=\pi(A)=0$. Donc π est polynôme annulateur de A. Par définition, le polynôme minimal de A divise π. Or π a deux racines complexes conjuguées distinctes, qui sont valeurs propres de A, donc racines du polynôme minimal. Donc π divise le polynôme minimal. Or c'est un polynôme unitaire. Donc le polynôme minimal de A est π. Comme il a deux racines simples, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

5. On trouve $Av = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})v$, et $Aw = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})w$. Donc v et w sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
6. Puisque la matrice A est réelle :
$$A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})v} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{v} \ .$$
Donc $\overline{v}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. De même,
$$A\overline{w} = \overline{Aw} = \overline{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})w} = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{w} \ .$$
Donc $\overline{w}$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
On doit vérifier que $(v, w, \overline{v}, \overline{w})$ constitue une base de $\mathbb{C}^4$. Pour cela, observons que les sous espaces propres associés aux valeurs propres $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sont d'intersection réduite à 0. Or les vecteurs v et w ne sont pas proportionnels. Ils engendrent donc un sous-espace vectoriel de dimension 2. De même $\overline{v}$ et $\overline{w}$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2. Ces deux espaces sont en somme directe et ce sont des sous-espaces de $\mathbb{C}^4$. Leur somme est donc $\mathbb{C}^4$, et donc $(v, w, \overline{v}, \overline{w})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^4$, donc une base. (On aurait pu aussi vérifier que c'est une famille libre en calculant le déterminant des 4 vecteurs, qui vaut $-12 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$). Soit P la matrice dont les colonnes sont $(v, w, \overline{v}, \overline{w})$. Cette matrice est inversible, et $D = P^{-1}AP$, où D est la matrice diagonale dont les deux premiers coefficients valent $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, les deux suivants $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
7. D'après la question 4, le polynôme minimal de A est $X^2 - 2X + 4$. Or le polynôme $X^3 + 8$ est multiple du polynôme minimal :
$$X^3 + 8 = (X^2 - 2X + 4)(X + 2) \ .$$
C'est donc un polynôme annulateur de A : $A^3 + 8I = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^{3n} = (-8)^n I \ , \quad A^{3n+1} = (-8)^n A \ , \quad A^{3n+2} = (-8)^n A^2 = (-8)^n (2A - 4I) \ .$$
8. Si $U_{n+1} = AU_n$, alors $U_n = A^n U_0$. Or $IU_0 = U_0$ et $AU_0 = {}^t(4, 0, 0, 0)$. D'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{3n} = (-8)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad U_{3n+1} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad U_{3n+2} = (-8)^n \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \ .$$

3 Compléments

3.1 Tout à l'envers

À partir de la définition axiomatique des *espaces vectoriels*, la notion de morphisme (*application linéaire*) s'ensuit. Dans le cas particulier de la dimension finie, pourvu que l'on ait choisi une base, les applications linéaires se représentent par des *matrices*. Une équation dont l'inconnue est un vecteur et la donnée une matrice est un *système linéaire*, que l'on peut résoudre à l'aide des *déterminants*. Le souci de représenter ces mêmes applications linéaires de la façon la plus simple possible conduit ensuite à la *décomposition spectrale*. Parmi les matrices admettant une décomposition spectrale simple se trouvent les *matrices symétriques*.

Du moins est-ce ainsi que les choses vous ont été présentées. Mais l'histoire ne s'est pas déroulée dans le même ordre [1]. Pour des calculs pratiques, on résoud des systèmes linéaires depuis la plus haute antiquité : la méthode du pivot de Gauss était déjà présente dans les « Neuf chapitres sur l'Art du calcul » en Chine au début de notre ère. Pourtant, la notion de déterminant n'a émergé qu'à la fin du XVIIe siècle, et n'a été vraiment formalisée qu'au début du XIXe, trente ans après les formules de Cramer. Que le déterminant d'un produit de matrices soit le produit des deux déterminants de ces matrices a été démontré indépendamment par Binet et Cauchy en 1812, bien avant qu'il soit question de multiplier des matrices ou de composer des applications linéaires. Les mêmes calculs revenant assez souvent pour la résolution d'équations différentielles, en particulier en astronomie, ils ont été petit à petit systématisés, et c'est ainsi que les valeurs propres sont apparues. En 1829, Cauchy publie un article dont le titre en dit long sur ses péoccupations algébriques : « Sur l'équation avec laquelle on détermine les inégalités séculaires dans les mouvements des planètes ». Il y calcule les maxima et minima d'une forme quadratique, ce qui le conduit tout droit au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots & = & sx \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \dots & = & sy \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \dots & = & sx \\ \dots & = & \dots \end{array}\right.$$

Et un peu plus loin, comme une remarque en passant,

> ...on prouve facilement que l'équation (7) ne saurait admettre de racines imaginaires, tant que les coefficients A_{xx}, A_{xy}, $A_{xz}\dots$; A_{yy}, $A_{yz}\dots$, $A_{zz}\dots$ restent réels. En effet...

Suit la première démonstration du fait que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles... plus de vingt ans avant que la notion de matrice ne soit introduite par Sylvester et Cayley, et avant que les valeurs propres aient été définies (indépendamment

1. F. Brechenmacher : les matrices : formes de représentation et pratiques opératoires (1850–1930) *CultureMATH – Site expert ENS Ulm/DESCO (2006)*

des matrices). Dès l'introduction de son article de 1858 « A memoir on the theory of matrices », Cayley annonce :

> I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant ; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. The determinant formed out of the matrix, diminished by the matrix considered as a single quantity involving the matrix unity, will be equal to zero.

C'est le théorème de Cayley-Hamilton... sans qu'il soit question encore de valeurs propres ! Quant aux espaces vectoriels et autres applications linéaires, ils apparaissent vers 1840, mais la relation entre matrices et applications linéaires n'est pas explicitée. D'ailleurs tout cela restera essentiellement confidentiel jusqu'à la fin du XIXᵉ. Il faudra attendre le début du XXᵉ pour que la puissance de l'algèbre linéaire soit reconnue, et les années 1930 pour qu'apparaissent les premiers livres qui l'exposent telle qu'elle vous est présentée.

3.2 Racines lambdaïques ou latentes ?

Le mémoire fondateur de Cayley n'a certainement pas eu le succès qu'il méritait en 1858. La notion de matrice est restée longtemps ignorée des autres mathématiciens, y compris de Sylvester. Ce n'est que vers les années 1880, que celui-ci, alors âgé de près de 70 ans et revenant sur les écrits de son ami, comprend la puissance de l'algèbre linéaire et s'enthousiasme.

> Qu'il me soit permis, avant de conclure, d'ajouter encore une petite réflexion sur l'importance de la question traitée ici. Elle constitue, pour ainsi dire, un canal qui, comme celui de Panama, sert à unir deux grands océans, celui de la théorie des invariants et celui des quantités complexes ou multiples : dans l'une de ces théories, en effet, on considère l'action des substitutions sur elles-mêmes, et dans l'autre, leur action sur les formes ; de plus, on voit que la théorie *analytique* des quaternions, étant un cas particulier de celle des matrices, cesse d'exister comme une science indépendante ; ainsi, de trois branches d'analyse autrefois regardées comme étant indépendantes, en voilà une abolie ou résorbée, et les deux autres réunies en une seule de substitution algébrique.

Pour autant il hésitera avant de fixer la notion de valeur propre. Voici ce qu'il écrit en 1882.

> Soit un déterminant quelconque donné, et ajoutons le terme $-\lambda$ à chaque terme diagonal ; on obtient ainsi une fonction de λ : je nomme les racines de cette fonction racines *lambdaïques* du déterminant donné [...]. i étant une

> quantité commensurable quelconque, les i^{es} puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de i^{e} puissance du déterminant.

Et en 1883 :

> It will be convenient to introduce here a notion (which plays a conspicuous part in my new theory of multiple algebra), namely that of the *latent roots* of a matrix – latent in a somewhat similar sense a vapour may be said latent in water or smoke in a tobacco leaf. If from each term in the diagonal of a given matrix, λ be substracted, the determinant to the matrix so modified will be a rational integer function of λ ; the roots of that function are the latent roots of the matrix, and there results the important theorem that the latent roots of any function of a matrix are respectively the same functions of the latent roots of the matrix itself : for example, the latent roots of the square of a matrix are the square of its latent roots.

Imaginatif et très porté sur la métaphore, Sylvester avait déjà baptisé les matrices, susceptibles d'engendrer différents systèmes de déterminants « as from the womb of a common parent ». Pourtant ni les racines latentes ni les racines lambdaïques n'ont survécu. L'idée de quantité « caractéristique » ou « propre » s'est imposée à la suite de Cauchy, y compris dans « eigenvalue » et « eigenvector » où le préfixe « eigen » est la traduction allemande de « propre ». Encore qu'il n'y ait pas loin de la « fumée latente dans une feuille de tabac » au « spectre » introduit par Hilbert dans les dernières années du XIX$^{\text{e}}$.

3.3 Le théorème de Perron-Frobenius

Le théorème que nous allons vous exposer n'est pas seulement splendide.

> It is a testament to the fact that beautiful mathematics eventually tend to be useful, and useful mathematics eventually tend to be beautiful.

On en trouve en effet des applications, non seulement un peu partout en mathématiques, mais aussi en économie, en théorie des populations, dans les réseaux sociaux etc [2]. On peut considérer par exemple que l'algorithme PageRank de Google en est un lointain avatar. Ce théorème a été démontré en 1907 par Oskar Perron (1880–1975).

Théorème 11 (de Perron)**.** *Soit A une matrice carrée à coeffficients réels strictement positifs. Alors A a une valeur propre simple α qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. À cette valeur propre maximale α correspond un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.*

2. C.R. MacCluer : The many proofs and applications of Perron's theorem *SIAM Review Vol. 42(3), p. 487–498 (2000)*

La beauté du résultat tient d'une part à son élégance, d'autre part dans un apparent paradoxe. La décomposition spectrale d'une matrice est liée à l'endomorphisme qu'elle représente, et elle est donc invariante par changement de base. La conclusion du théorème (existence d'une valeur propre réelle supérieure au module de toute autre valeur propre) est liée à l'endomorphisme et non à la matrice. Or l'hypothèse (coefficients strictement positifs) n'est pas invariante par changement de base. Pour comprendre ce paradoxe, il faut interpréter l'hypothèse de façon géométrique. Par exemple en dimension 2, considérez le quart de plan formé des vecteurs à coordonnées strictement positives. Le fait que A soit à coefficients strictement positifs entraîne que le produit par A d'un vecteur à coordonnées strictement positives reste dans le même quart de plan. En d'autres termes, l'*endomorphisme laisse stable* ce quart de plan. Il n'est donc pas surprenant qu'il y ait dans ce même quart de plan une direction invariante.

Soit dit entre parenthèses, Perron n'en était pas à un paradoxe près :

> Soit N le plus grand entier naturel. Si $N > 1$, alors $N^2 > N$, ce qui contredit la définition. Donc $N = 1$.

Démonstration : D'abord quelques notations pour faciliter la lecture. Pour tous vecteurs $u = (u_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $v = (v_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$,

- $u \leqslant v$ signifie $\forall i = 1, \ldots, n\,,\ u_i \leqslant v_i$,
- $u < v$ signifie $\forall i = 1, \ldots, n\,,\ u_i < v_i$,
- $\mathbf{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$,
- $\mathbf{1}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1.

Soit S l'ensemble des réels $\lambda \geqslant 0$ tels qu'il existe $v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\mathbf{0} \leqslant v \leqslant \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda v \leqslant Av\ .$$

Soit λ une valeur propre de A et $w = (w_i)$ un vecteur propre associé. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, posons $u_i = |w_i|$, puis $u = (u_i)_{i=1,\ldots,n}$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\lambda w = Aw \implies |\lambda| u \leqslant Au\ .$$

En divisant u par la somme de ses coordonnées, on en déduit que $|\lambda|$ appartient à l'ensemble S, qui est donc non vide. Pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, notons $a_{ij} > 0$ le coefficient d'ordre (i, j) de A. Tout élément β de S vérifie :

$$\forall i = 1 \ldots, n\,,\ \beta v_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leqslant \left(\max_{j=1}^{n} v_j\right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)\ .$$

Donc $\beta \leqslant \max_i \sum_j a_{ij}$: l'ensemble S est borné. Soit α la borne supérieure de S, et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S convergeant vers α. À chacun des α_n correspond un vecteur $v^{(n)}$, dont les coordonnées sont positives ou nulles et de somme 1, et tel que $\alpha_n v^{(n)} \leqslant Av^{(n)}$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite

$(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(v^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Soit v la limite de cette sous-suite. Les coordonnées de v sont encore positives ou nulles et de somme 1 et en particulier v est non nul. En passant à la limite en k :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \alpha_{n_k} v^{(n_k)} \leqslant A v^{(n_k)} \implies \alpha v \leqslant A v\ .$$

Supposons $\alpha v \neq Av$. Le vecteur $Av - \alpha v$ a toutes ses coordonnées positives ou nulles et l'une au moins est non nulle. Donc son produit par A a toutes ses coordonnées strictement positives (d'après l'hypothèse sur A) : $A(Av - \alpha v) > \mathbf{0}$. Notons v' le vecteur proportionnel à Av dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles et de somme 1 : $Av' > \alpha v'$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Av' > (\alpha+\varepsilon)v'$, ce qui contredit la définition de α comme borne supérieure de S. On conclut donc que $\alpha v = Av$, donc α est valeur propre, et v est un vecteur propre associé à α. A priori, les coordonnées de v sont positives ou nulles. Mais alors les coordonnées de Av sont strictement positives. Puisque $Av = \alpha v$, on en conclut que $\alpha > 0$ et $v > \mathbf{0}$.

Montrons maintenant que α est strictement supérieure au module de toute autre valeur propre. Soit λ une valeur propre de A et $w = (w_i)$ un vecteur propre associé. Nous avons déjà montré que $|\lambda| \in S$, en utilisant l'inégalité triangulaire.

$$\lambda w = Aw \implies |\lambda| u \leqslant Au\ .$$

Comme α est la borne supérieure de S, $|\lambda| \leqslant \alpha$. Supposons $|\lambda| = \alpha$: $\alpha u \leqslant Au$. Par le raisonnement déjà effectué ci-dessus, on en conclut que nécessairement $\alpha u = Au$, donc les inégalités dans la majoration ci-dessus sont en fait des égalités. Mais ceci n'est possible que si u est proportionnel à w. Mais alors, u est aussi vecteur propre associé à λ, donc $\lambda = \alpha$.

Il ne reste qu'un petit point à démontrer, mais c'est le plus délicat : α est valeur propre simple. Pour cela, nous commençons par montrer que le sous-espace propre associé à α est une droite. Soit w un vecteur propre associé à α et comme ci-dessus u le vecteur des modules des coordonnées de w. Par un raisonnement déjà vu,

$$\alpha w = Aw \implies \alpha u \leqslant Au \implies \alpha u = Au \implies u > \mathbf{0}\ .$$

De sorte qu'aucun vecteur propre associé à α ne peut avoir de coordonnée nulle. Mais si on pouvait trouver deux vecteurs propres indépendants associés à α, alors on pourrait en former une combinaison linéaire, qui serait encore vecteur propre associé à α, et dont par exemple la première coordonnée serait nulle. C'est impossible, donc le sous-espace propre associé à α est de dimension 1. Nous allons utiliser cela pour démontrer que α est racine simple du polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - XI)$. Considérons le polynôme $P_A(\alpha + X)$, qui est le déterminant de $(A - \alpha I) - XI$. Son terme constant, qui est le déterminant de $A - \alpha I$, est nul. Le coefficient du terme de degré 1 est la trace (somme des coefficients diagonaux) de la *comatrice* de $A - \alpha I$ (matrice des mineurs d'ordre $n-1$, affectés de signes alternés). Notons C cette comatrice. Comme le sous-espace propre associé à α est de dimension 1, $A - \alpha I$ est de rang $n - 1$, donc la matrice C n'est pas nulle. Nous voulons démontrer que sa *trace* est non nulle. Or $C(A-\alpha I) = (A-\alpha I)C = 0$, car le déterminant de $A-\alpha I$ est nul. En particulier, tous les vecteurs colonnes de C sont des vecteurs propres de A associés à α. En tant que tels, ils sont proportionnels à v, dont toutes les coordonnées sont strictement positives. Les vecteurs lignes sont des vecteurs propres de ${}^tA$ associés à α : ils sont donc également proportionnels à un vecteur à coordonnées strictement positives. Ceci entraîne que tous les coefficients de C sont tous non nuls et de même signe (tous strictement positifs ou tous strictement négatifs). En particulier la trace est non nulle, et α est racine simple de $P_A(X)$. $\square$

Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) étendit en 1912 le théorème de son jeune collègue Perron aux matrices à coefficients positifs *ou nuls*, dont une puissance entière a ses coefficients strictement positifs (matrices irréductibles). C'est la version qui est à la base de la plupart des applications, en particulier aux chaînes et processus de Markov, mais nous aurons l'occasion de vous en reparler.

Professeur à l'université de Tübingen, puis de Göttingen, Perron est l'auteur de 218 articles, dont quelques uns publiés après 80 ans, ce qui est une longévité assez exceptionnelle. Il a par ailleurs continué sa pratique assidue de l'alpinisme bien au-delà de 70 ans.

Quant à Frobenius, professeur à Zürich, puis Berlin, on lui doit une grande partie de la théorie des matrices, en particulier ce qui concerne les *matrices compagnons*. Il a montré qu'une matrice quelconque est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont des matrices compagnons. Il est resté célèbre pour ses colères et ses opinions tranchées : voyez ce qu'il écrit au sujet de Sophus Lie (1842–1899).

> Lie se contente de très peu de connaissances dans ses innombrables papiers. Il a lu très peu de travaux des grands mathématiciens classiques et en a compris encore moins. Ce que Lie nous fournit, c'est une doctrine de méthodes de peu d'utilité, dont le formalisme dénudé, qui à y bien penser nous rappelle les pires moments de la théorie des invariants, doit rebuter tout lecteur au goût éduqué.

3.4 Jordan contre Kronecker

Quand Camille Jordan (1838–1922) publie en 1870 les quelque 700 pages de son « Traité des substitutions et des équations algébriques », il installe définitivement la théorie des groupes, donnant au travaux de Galois (antérieurs de 40 ans) toute leur importance. Au sein de ce monument, il consacre quelques dizaines de pages aux groupes de « substitutions linéaires » dont 12 pour le paragraphe « Forme canonique des substitutions linéaires ». On y trouve bien la « réduction de Jordan », même si vous auriez du mal à y reconnaître sa version moderne. Il se trouve que au moins 2 ans auparavant Karl Weierstrass (1815–1897) puis Leopold Kronecker (1823–1891) avaient exposé une théorie sur un sujet apparemment différent, mais qui ressemblait beaucoup à celle de Jordan. Ce dernier raisonnait en termes de faisceaux de substitutions linéaires, tandis qu'à Berlin on réduisait des formes bilinéaires. Cette différence de point de vue allait alimenter un spectaculaire dialogue de sourds par l'intermédiaire de mémoires publics et de lettres privées, s'étendant sur toute l'année 1874 [3]. La polémique commence par un article de Jordan fin 1873, ayant pour sujet le problème déjà traité par les deux allemands, mais utilisant ses propres méthodes « extrêmement simples ».

> Le premier de ces problèmes est nouveau si nous ne nous trompons. Le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair) par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionels qui, pourtant, ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass. Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire, extrêmement simples et ne comportent aucune exception [. . .]

Ce à quoi Kronecker réplique :

> [. . .] dans le Mémoire de M. Jordan « Sur les formes bilinéaires » (Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, pp. 35–54), la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. Weierstrass de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. Jordan l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects ; [. . .]

Jordan très vexé écrit à l'« éminent géomètre de Berlin » :

> J'ai publié il est vrai (c'était mon droit évident) sans vous consulter des recherches qui complétaient les vôtres sur une question dont vous vous étiez occupé, et dont vous ne m'aviez jamais entretenu. Là-dessus, sans explication préalable, à l'instant même vous publiez une critique plus longue que mon article, où vous me reprochez 1° De n'avoir rien compris à la manière de poser la question 2° De n'y avoir apporté aucun élément nouveau 3° D'avoir pillé sans scrupule M. Weierstrass, M. Christoffel et vous.
>
> Si au lieu de jeter brusquement ce débat dans le public, vous vous étiez adressé à moi pour échanger des explications, comme je me voyais en droit de l'espérer, nous nous serions sans doute entendu. Sur votre indication, j'aurais relu plus attentivement votre mémoire de 1868 et constaté, ce que je n'avais pas remarqué à première vue, que les formes bilinéaires non citées

3. F. Brechenmacher : Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870–1930) *Revue d'Histoire des Mathématiques 2(13) p. 187–257 (2008)*

> dans votre travail, y sont pourtant implicitement comprises. De votre côté, vous m'auriez concédé, j'en suis certain, que la réduction publiée par vous à cette époque était insuffisante 1° Parce que ces faisceaux réduits contenaient encore des coefficients indéterminés à faire disparaître qui gêneraient beaucoup pour étudier la question de l'équivalence 2° Parce que le caractère fondamental de la réduction à savoir la décomposition en faisceaux élémentaires n'était pas mise en évidence.
>
> Vous m'auriez répondu que cette réduction ultérieure n'offrait pas grande difficulté, j'aurais répliqué que toute la question est très simple d'un bout à l'autre et nous serions tombés d'accord.
>
> La publication imprévue de vos objections a un peu changé tout cela. Attaqué devant tout le monde, il me faut bien répondre de même et il ne tiendra pas à moi que ce débat s'arrête là.

La querelle est l'occasion pour Kronecker d'exprimer son idéal de généralité : entre Cauchy et Weierstrass, tout le monde s'était contenté de traiter le cas simple où « le déterminant ne contient que des facteurs inégaux » (les valeurs propres sont distinctes). Tandis que désormais…

> Parce que, pendant si longtemps, on n'osait pas faire tomber la condition que le déterminant ne contient que des facteurs inégaux, on est arrivé avec cette question connue de la transformation simultanée de deux formes quadratiques ; qui a été si souvent traitée depuis un siècle, mais de manière sporadique, à des résultats très insuffisants et les vrais aspects de l'étude ont été ignorés. Avec l'abandon de cette condition, le travail de Weierstrass de l'année 1858 a conduit à un aperçu plus élevé et notamment à un règlement complet du cas, dans lequel n'existent que des diviseurs élémentaires simples. Mais l'introduction générale de cette notion de diviseur élémentaire, dont seule une étape provisoire était alors accomplie, intervint seulement dans le mémoire de Weierstrass de l'année 1868, et une lumière tout à fait nouvelle est ainsi faite sur la théorie des faisceaux pour n'importe quel cas, avec la seule condition que le déterminant soit différent de zéro. Quand j'ai aussi dépouillé cette dernière restriction et l'ai développée à partir de la notion de diviseur élémentaire des faisceaux généraux, la clarté la plus pleine s'est répandue sur une quantité de nouvelles formes algébriques, et par ce traitement complet de l'objet, des vues plus élevées ont été acquises sur une théorie des invariants comprise dans sa vraie généralité.

En 1878, Frobenius montrera que les points de vue de Jordan et Kronecker étaient bel et bien équivalents, en élargissant la théorie de manière à englober les deux façons de voir. En attendant, Jordan qui considère que la qualité principale de son approche est son « extrême simplicité », ne parvient pas à obtenir, ni de Cayley et Sylvester ni surtout de ses collègues français, le soutien qu'il estime mériter. Cela l'inquiète quelque peu, surtout au moment où il candidate à l'Académie des Sciences. Il s'en ouvre à

Hermite.

> Veuillez m'excuser si je prends la liberté de vous importuner encore en vous renouvelant ma demande d'audience malgré le désir que m'aviez manifesté de ne vous occuper de cette affaire que lorsque les cours de l'école polytechnique seraient terminés. J'apprends en effet de M. Fremy qu'il a l'intention de proposer à l'Académie de pourvoir à la vacance dans les délais strictement règlementaires, c'est-à-dire très prochainement. D'autre part je n'ai pas pu encore obtenir un soutien d'aucun des membres de la section auxquels je me suis adressé, bien qu'ils déclarent tous qu'ils ne sont pas au courant de mes titres. Enfin j'apprends que l'on commence à dire ça et là que mes travaux sont inintelligibles, et n'ont sans doute pas la portée qu'on leur attribue. Vous m'avouerez qu'une semblable condamnation sans examen serait un procédé trop commode pour se débarrasser d'un candidat. Permettez-moi donc de faire appel à votre bienveillante équité. Vous seul avez l'autorité nécessaire en ces sujets difficiles, pour imposer silence à ces bruits défavorables, et me faire rendre la justice qui est due à tous. Si vous avez la bonté de m'accorder deux heures d'entretien sérieux, je ne doute pas qu'il me soit facile de vous édifier pleinement sur l'authenticité et la valeur de mes découvertes. Je n'ai d'ailleurs pas besoin d'ajouter que je resterais à votre disposition pour tous les éclaircissements ultérieurs que vous voudriez bien me demander.

La réponse d'Hermite laisse transparaître comme un léger agacement !

> L'étude de vos travaux est tellement difficile et tellement pénible que mes devoirs présents me la rendent impossible. Votre mise en demeure de l'entreprendre cependant sur le champ, m'oblige de vous déclarer que si vous récidivez à me les faire parvenir par ceux de vos amis qui sont membres de l'Académie, j'y réponds en envoyant immédiatement ma démission de membre de l'Institut.

Ne vous inquiétez pas, ce n'était que partie remise : Jordan a bien été élu à l'Académie des Sciences, le 4 avril 1881.