# Séries entières

*Luc Rozoy, Bernard Ycart*

Parmi les séries de fonctions, les séries entières sont celles que vous rencontrerez le plus souvent. Ce serait une bonne idée de réviser les théorèmes généraux sur les suites de fonctions, mais vous aurez surtout besoin des techniques d'étude des séries numériques. Vous pouvez considérer ce chapitre comme la suite du chapitre sur les développements limités, auquel il ressemble beaucoup. Vous pouvez aussi le voir comme un premier pas vers les fonctions holomorphes et analytiques, que vous apprendrez plus tard.

## Table des matières



29 avril 2014

# 1 Cours

## 1.1 Rayon de convergence

**Définition 1.** *On appelle* série entière *une série du type*

$$\sum a_n\, z^n\ ,$$

*où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels ou de complexes, et* $z$ *désigne une variable complexe. La* somme *est la fonction qui à tout complexe* $z$ *tel que* $\sum a_n\, z^n$ *converge, associe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\ .$$

Les deux exemples de base de séries entières sont la série géométrique et la série exponentielle. Nous verrons par la suite que beaucoup de séries usuelles se ramènent à l'une ou à l'autre.

**Série géométrique :**

$$\forall z\ ,\ |z| < 1\ , \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$$

**Série exponentielle :**

$$\forall z \in \mathbb{C}\ , \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Le calcul de la somme de la série géométrique est facile, grâce à l'expression explicite des sommes partielles. Le fait que la somme de la série exponentielle soit $\exp(z)$ n'est pas évident. Deux points de vue sont possibles.

1. Après avoir démontré que la série converge pour tout $z$, on peut *définir* l'exponentielle complexe comme la somme de cette série. À partir des résultats sur les séries entières que nous allons établir, on peut alors *démontrer* toutes les propriétés classiques de l'exponentielle.
2. Il existe d'autres définitions de l'exponentielle. On peut par exemple la *définir* sur $\mathbb{R}$ comme la fonction inverse du logarithme népérien, qui lui-même est défini comme la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ; on étend ensuite la définition à $\mathbb{C}$ tout entier. On peut alors *démontrer* que $\exp(z)$ est la somme de la série exponentielle.

Étant donnée une série entière $\sum a_n\, z^n$, la première question est celle de son *domaine de convergence*, à savoir l'ensemble des complexes $z$ tels que la série converge. On utilise pour cela le théorème suivant qui exprime une propriété très particulière d'une série entière, liée aux *disques* du plan complexe centrés en 0. Si $r$ est un réel positif, on note $D_r$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r$.

$$D_r = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < r\}\ .$$

**Théorème 1.** *Soit $r$ un réel strictement positif. S'il existe $M$ tel que pour tout $n$ $|a_n|\, r^n < M$, alors pour tout $z \in D_r$, la série entière $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente.*

Deux possibilités existent donc : soit $|a_n|\, r^n$ est borné, et la série converge sur $D_r$, soit $|a_n|\, r^n$ n'est pas borné. Rappelons que le terme général d'une série convergente tend vers 0. Donc si $|a_n|\, r^n$ est borné, alors $|a_n|\, r'^n$ tend vers 0 pour tout $r' < r$, et en particulier $|a_n|\, r'^n$ est aussi borné.

*Démonstration :* Écrivons :

$$|a_n\, z^n| = |a_n|\, r^n \left|\frac{z^n}{r^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z^n}{r^n}\right| \ .$$

Si $|z| < r$, $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ et la série $\sum M \left|\frac{z^n}{r^n}\right|$ converge. D'où le résultat par le théorème de comparaison des séries. □

**Définition 2.** *On appelle* rayon de convergence *de la série entière $\sum a_n\, z^n$ le réel $R$ défini par :*

$$R = \sup\{r \geqslant 0\,,\ (|a_n|\, r^n) \text{ est bornée}\}\ .$$

*Le disque $D_R$ est appelé* disque de convergence *de la série entière $\sum a_n\, r^n$.*

Rappelons que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie, et que par convention, la borne supérieure d'une partie non majorée est $+\infty$. Le disque de convergence $D_R$ est le plus grand disque (ouvert) tel que $\sum a_n\, z^n$ converge à l'intérieur de ce disque. Par définition de la borne supérieure, si $r > R$, la suite $(|a_n|\, r^n)$ n'est pas bornée, elle ne peut donc pas tendre vers 0 : si $|z| > R$, la série $\sum a_n\, z^n$ diverge (voir figure 1). Nous n'étudierons pas en détail ce qui se passe pour $|z| = R$, car la situation est compliquée : tous les cas sont possibles. En voici un exemple. Pour tout réel $\alpha$, la série

$$\sum n^\alpha\, z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet $n^\alpha\, r^n$ tend vers 0 pour $r < 1$, vers $+\infty$ pour $r > 1$. La série entière $\sum n^\alpha\, z^n$ converge pour $|z| < 1$, diverge pour $|z| > 1$. Considérons maintenant un nombre complexe $z$ de module 1 : $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

- Si $\alpha \geqslant 0$, la série $\sum n^\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ diverge.
- Si $\alpha < -1$, la série $\sum n^\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ est absolument convergente.
- Si $-1 \leqslant \alpha < 0$, la série $\sum n^\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ est convergente pour $\theta \neq 2k\pi$, mais pas absolument convergente. Pour $z = 1$, la série $\sum n^\alpha$ diverge.

Le rayon de convergence de la série exponentielle est infini, puisque pour tout $r \geqslant 0$, $\frac{r^n}{n!}$ tend vers 0. Par contre, le rayon de convergence de la série $\sum n!\, z^n$ est nul, puisque pour tout $r > 0$, $n!\, r^n$ tend vers l'infini. Comme autre cas particulier, si la suite $a_n$ est nulle au-delà du rang $d$, alors $\sum_{n=0}^{d} a_n\, z^n$ est un polynôme de degré $d$, qui est défini pour tout $z$. C'est une série de rayon de convergence infini.

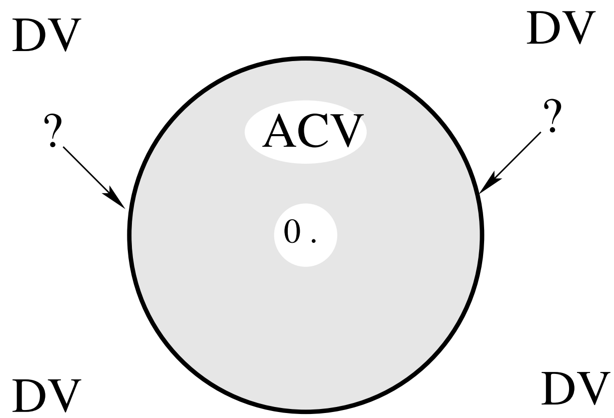


FIGURE 1 – Disque de convergence d'une série entière.

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est lié aux coefficients $a_n$ de la façon suivante.

**Théorème 2.** *Le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n r^n$ est tel que :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{n_0\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant n_0} \sqrt[n]{|a_n|} \,.$$

*Démonstration :* Pour éviter les cas particuliers nous supposons que $R$ est strictement positif et fini. Les cas $R = 0$ et $R = +\infty$ se traitent de la même manière, avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$. Examinons la suite $(|a_n|\, r^n)$ dans les deux cas $0 < r < R$ et $r > R$.

1. $0 < r < R$ :
   Dans ce cas la suite $(|a_n|\, r^n)$ tend vers 0, puisque la série $\sum a_n\, r^n$ est absolument convergente. Donc il existe $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$, $|a_n|\, r^n \leqslant 1$. Or :
   $$|a_n|\, r^n \leqslant 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|}\, r \leqslant 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r} \,.$$
   Mais si tous les $\sqrt[n]{|a_n|}$ au-delà de $n_0$ sont inférieurs à $\frac{1}{r}$, alors $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r < R$, on en déduit :
   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R} \,.$$
2. $r > R$ :
   Dans ce cas la suite $(|a_n|\, r^n)$ n'est pas bornée, par définition de $R$. Donc pour tout $N$, il existe $n > N$ tel que $|a_n|\, r^n \geqslant 1$. Or :
   $$|a_n|\, r^n \geqslant 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|}\, r \geqslant 1 \implies \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{r} \,.$$

Mais si une infinité parmi les $\sqrt[n]{|a_n|}$ sont supérieurs à $\frac{1}{r}$, alors $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r > R$, on en déduit :

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \frac{1}{R} \;.$$

□

Le théorème 2 rappelle évidemment le critère de Cauchy. Or le critère de d'Alembert est plus facile à appliquer en général. Pour toutes les séries que l'on rencontrera en pratique, le corollaire suivant suffit à déterminer le rayon de convergence.

**Corollaire 1.** *Soit* $(a_n)$ *une suite telle que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *converge. Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n\, z^n$ *est tel que :*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;.$$

Ce résultat vaut aussi pour $R = 0$ et $R = +\infty$, toujours avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$. Il s'applique aux exemples que nous avons traités jusqu'ici : $\sum n^\alpha r^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n!\, z^n$.

*Démonstration* : Il existe une relation entre les critères de Cauchy et d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge, alors $\sqrt[n]{|a_n|}$ converge également, et la limite supérieure de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est sa limite. □

Retenez donc qu'une série entière converge absolument sur son disque de convergence. De plus la convergence est uniforme, sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence.

**Proposition 1.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R$*. Soit* $r$ *un réel tel que* $0 < r < R$*.*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0\,,\ \forall z\ \ t.q.\ |z| \leqslant r\ , \quad \left|\sum_{k=0}^{n} a_n z^n - \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n\right| < \varepsilon\;.$$

*Démonstration* : Elle utilise une majoration que nous avons déjà rencontrée. Fixons $r'$ tel que $r < r' < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r'^n \frac{r^n}{r'^n} \leqslant M \frac{r^n}{r'^n}\;,$$

où $M$ est un majorant de $|a_n| r'^n$ (qui existe par définition du rayon de convergence). Alors, pour tout complexe $z$ de module inférieur ou égal à $r$ :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_n z^n - \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} M \frac{r^k}{r'^k} = \left(\frac{Mr}{r'-r}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}$$

Cette majoration étant indépendante de $z$, la convergence est bien uniforme. □

## 1.2 Propriétés de la somme

Les résultats de cette section ont de nombreuses conséquences pratiques sur les calculs de sommes de séries entières. Nous examinons le comportement des séries par rapport aux opérations habituelles (combinaisons linéaires et produit).

**Théorème 3.** *Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$. Pour tout complexe $z$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a :*

1.
$$\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)\, z^n\ .$$
*pour tous complexes $\alpha$ et $\beta$.*

2.
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n\ ,$$
*où pour tout $n \geqslant 0$,*
$$c_n = \sum_{h+k=n} a_h b_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\ .$$

*Démonstration* : La linéarité découle immédiatement des résultats analogues sur les suites et séries numériques. Concernant le produit, nous commençons par la convergence. Soit $z$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} |c_i||z|^i &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{h+k=i} |a_h||b_k|\right) |z|^{h+k} \\
&\leqslant \left(\sum_{h=0}^{n} |a_h||z|^h\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k||z|^k\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{h=0}^{+\infty} |a_h||z|^h\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k||z|^k\right)
\end{aligned}$$

Puisque $z$ est inférieur à la fois à $R_A$ et $R_B$, les deux séries $\sum a_k z^k$ et $\sum b_h z^h$ sont absolument convergentes. Les inégalités ci-dessus montrent que les sommes partielles de la série de terme général $|c_n||z|^n$ sont bornées. Comme ces sommes partielles sont croissantes et majorées elle convergent. Donc $\sum c_n z^n$ est absolument convergente.

De plus :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n} c_i z^i - \left(\sum_{h=0}^{n} a_h z^h\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k\right)\right| &\leqslant \sum_{h+k>n} |a_h||b_k||z|^{h+k} \\
&\leqslant \sum_{i>n} |c_i||z|^i\ .
\end{aligned}$$

Comme la série de terme général $|c_n||z|^n$ est absolument convergente, son reste à l'ordre $n$ tend vers 0, d'où le résultat. $\square$

Le théorème 3 affirme que les combinaisons linéaires et le produit de deux séries entières convergent *au moins* si ces deux séries convergent. Mais il peut se faire que le rayon de convergence de la série somme ou de la série produit soient strictement supérieurs à $\min\{R_a, R_b\}$. Par exemple, les deux séries $\sum(1+2^n)\, z^n$ et $\sum(1-2^n)\, z^n$ ont pour rayon de convergence $\frac{1}{2}$. Leur somme $\sum 2\, z^n$ a pour rayon de convergence 1. La série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, le polynôme $1-z$ est une série entière particulière, de rayon de convergence infini. Leur produit est la constante 1, de rayon de convergence infini.

Considérons maintenant les deux séries $\sum z^n$, de rayon de convergence 1 et de somme $\frac{1}{1-z}$, et $\sum 2^n\, z^n$, de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, et de somme $\frac{1}{1-2z}$. Comme conséquence du théorème 3, pour tout $z$, $|z| < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} &= (2-1) + (2.2-1)z + \cdots + (2.2^n - 1)z^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1)\, z^n \,.\end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)(1-2z)} &= (1 + z + \cdots + z^n + \cdots)(1 + 2z + \cdots + 2^n\, z^n + \cdots) \\ &= 1 + (2+1)z + \cdots + (2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1)\, z^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1)\, z^n \,.\end{aligned}$$

Les deux séries sont égales, comme on pouvait s'y attendre.

Voici une autre application de la linéarité. Considérons la série $\sum \frac{n^2}{n!}\, z^n$, de rayon de convergence infini. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}\, z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}\, z^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}\, z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, z^n \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\, z^{m+2} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\, z^{m+1} \\ &= z^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\, z^m + z \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\, z^m = (z^2 + z)\mathrm{e}^z \,.\end{aligned}$$

La même technique s'applique pour sommer toutes les séries entières du type $\sum \frac{P(n)}{n!}\, z^n$, si $P(n)$ est un polynôme en $n$. On commence par exprimer $P(n)$ comme combinaison linéaire de 1, $n$, $n(n-1)$, ... et on se ramène ensuite à la série exponentielle par des changements d'indice.

Comme nouvelle application du théorème 3, nous allons vérifier la propriété fondamentale de l'exponentielle.

**Proposition 2.** *Si pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit* $\exp(z)$ *comme la somme de la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$*, alors :*

$$\forall a, b \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)\,.$$

*Démonstration :* On peut voir $\exp(a)$ comme la valeur en $z=1$ de la série $\sum \frac{a^n}{n!}\, z^n$, et $\exp(b)$ comme la valeur en $z=1$ de la série $\sum \frac{b^n}{n!}\, z^n$. D'après le théorème 3, le produit de ces deux séries est la série $\sum c_n\, z^n$, avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\frac{b}{1} + \cdots + \frac{a}{1}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{(a+b)^n}{n!}\,,
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

La série $\sum c_n z^n$ a donc pour somme $\exp((a+b)z)$, et sa valeur en 1 est $\exp(a+b)$. □

Dans la proposition précédente, nous avons remplacé $z$ par $az$ et $bz$ dans la série exponentielle. Remplacer la variable $z$ par une fonction de celle-ci est une opération que l'on utilise fréquemment. En voici deux exemples. Pour tout $z$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}\,.$$

Remplaçons $z$ par $-z$ :

$$1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \frac{1}{1+z}\,.$$

Remplaçons $z$ par $z^2$ :

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z^2}\,.$$

On aurait pu obtenir ce résultat de deux autres façons en utilisant le théorème 3, puisque :

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{1+z} = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1+z}\;.$$

Le lecteur vérifiera que les trois méthodes conduisent au même résultat.

## 1.3 Fonctions développables en série entière

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la somme d'une série entière, vue comme une fonction de la variable $z$. Afin de ne pas compliquer les définitions, nous supposons dans toute cette section que $z$ est *réel*. Les identités obtenues restent vraies pour $z$ complexe, mais ce serait anticiper inutilement sur des chapitres ultérieurs que de sortir du domaine réel.

**Définition 3.** *Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ un réel et $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $g$ est* développable en série entière en $z_0$ *sur $]z_0 - R, z_0 + R\,[$, si pour tout $z \in ]z_0 - R, z_0 + R\,[$,*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n\;.$$

*Cette identité est le* développement en série entière *de $g$.*

Un simple changement de variable permet de se ramener à des développements en série entière *en* 0.

**Proposition 3.** *La fonction $g$ est développable en série entière en $z_0$ sur $]z_0 - R, z_0 + R\,[$, si et seulement si la fonction $f\ : z \longmapsto g(z_0+z)$ est développable en série entière en 0 sur $]-R, R\,[$.*

La vérification est immédiate, et ce résultat nous autorise à ne plus considérer désormais que des développements en série entière en 0. Soit $\sum a_n\,z^n$ une série entière, et $R$ son rayon de convergence. D'après le théorème 2, la série converge pour tout réel $z$ de valeur absolue strictement inférieure à $R$, soit sur l'intervalle $]-R, R\,[$. Sa somme est donc développable en série entière sur $]-R, R\,[$, par définition.

Le théorème suivant montre qu'une fonction développable en série entière, est indéfiniment dérivable. Ses dérivées successives ainsi que ses primitives sont également développables en série entière.

**Théorème 4.** *Soit $f$ une fonction développable en série entière, telle que pour tout $z \in ]-R, R\,[$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n = a_0 + a_1\,z + \cdots + a_n\,z^n + \cdots$$

*La fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme, qui converge sur $]-R, R[$.*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, z^{n-1} = a_1 + 2a_2\, z + \cdots + na_n\, z^{n-1} + \cdots$$

*La primitive de $f$ qui s'annule en 0 est la somme de la série intégrée terme à terme, qui converge sur $]-R, R[$.*

$$\int_0^z f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1} = a_0\, z + \frac{a_1}{2}\, z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1} + \cdots$$

*Démonstration* : Nous commençons par démontrer que la série $\sum a_n z^n$ et la série dérivée $\sum na_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence. En effet :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp(\ln(n)/n) = 1 \; .$$

Donc :

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \; ,$$

d'où le résultat par le théorème 2.

La proposition 1 entraîne que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[-r, r]$ inclus dans $]-R, R[$. Si une suite de fonctions dérivables converge uniformément sur un intervalle, ainsi que la suite des dérivées, alors la limite de la suite est dérivable à l'intérieur de l'intervalle, et sa dérivée est la limite des dérivées. Ceci entraîne que la fonction $f$ est dérivable sur tout intervalle $]-r, r[$ inclus dans $]-R, R[$, donc sur $]-R, R[$. Par récurrence, $f$ est donc indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.

En appliquant le résultat de dérivabilité à la série primitive, on obtient la seconde partie du théorème. □

Par exemple la fonction $z \mapsto \exp(az)$, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

$$\exp(az) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} z^n \; .$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\exp(az) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na^n}{n!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^{m+1}}{m!} z^m \\
&= a\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!} z^m = a\exp(az)\ .
\end{aligned}$$

Le développement en série entière sur $]-1,1[$ de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est $\sum z^n$. Sa dérivée est :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)z^m = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

On pourrait aussi obtenir ce résultat en effectuant le produit de la série $\sum z^n$ par elle-même. On peut aussi calculer la primitive :

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} = z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

En remplaçant $z$ par $-z^2$ dans la série géométrique, puis en prenant la primitive, on obtient les développements en série entière de $\frac{1}{1+z^2}$ et $\arctan(z)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots \\
\arctan(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n+1} + \cdots
\end{aligned}$$

En appliquant de manière itérée le théorème 4 aux dérivées successives de $f$, on peut donc calculer leurs développements en série entière. On en déduit en particulier l'expression du développement de $f$ en fonction des dérivées successives, évaluées en $z = 0$ : vous connaissez déjà le polynôme de Taylor.

**Corollaire 2.** *Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors son développement est :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)\,z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots$$

*Démonstration* : Si $f(z) = \sum a_n\, z^n$, alors f(0) est le premier terme de la série : $f(0) = a_0$. Mais le théorème 4 donne aussi :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \ ,$$

dont le premier terme est $a_1 = f'(0)$. La dérivée seconde est :

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \ ,$$

dont le premier terme est $2a_2 = f''(0)$. Par récurrence, la dérivée $k$-ième est :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k} \ ,$$

dont le premier terme est $k! a_k = f^{(k)}(0)$. D'où le résultat. □

**Définition 4.** *Si $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$, on appelle* série de Taylor *de $f$ en 0 la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n \ .$$

Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors $f$ est indéfiniment dérivable à tout ordre au voisinage de 0, et donc admet un développement limité en 0 à tout ordre. Le développement limité à l'ordre $n$ de $f$ est la somme partielle d'ordre $n$ de sa série de Taylor.

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n + o(z^n) \ .$$

Malheureusement, la réciproque est fausse : il peut se faire que $f$ admette un développement limité à tous ordres au voisinage de 0, sans que $f$ soit somme de sa série de Taylor. L'exemple classique est :

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\lim_{z\to 0} z^{-n} f(z) = 0 \ .$$

Donc $f(z) = o(z^n)$, pour tout $n$. On en déduit que $f$ ainsi que toutes ses dérivées sont prolongeables par continuité par 0 en 0, et que le développement limité de $f$ à tout ordre est nul. Pourtant, bien que la série de Taylor de $f$ soit nulle, $f$ n'est pas identiquement nulle.

Nous allons donner une condition suffisante pour qu'une fonction indéfiniment dérivable soit développable en série entière. Pour cela nous utilisons une formule de Taylor qui donne une expression explicite du reste, la formule de Taylor *avec reste intégral.*

**Théorème 5.** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-R,R[$ (c'est-à-dire $n+1$ fois dérivable, de dérivée $(n+1)$-ième continue). Pour tout $z \in ]-R,R[$ on a :*

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n + r_n(z) \ ,$$

*avec*

$$r_n(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt \ .$$

*Démonstration :* Pour $n = 0$, la formule est vraie :

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(t)\, dt \ .$$

Intégrons $r_n(z)$ par parties.

$$\begin{aligned} r_n(z) &= \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \left[\frac{(z-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t)\right]_0^z + \int_0^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, dt \\ &= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n + r_{n-1}(z) \ . \end{aligned}$$

Si on suppose la formule vraie à l'ordre $n-1$, alors :

$$r_{n-1}(z) = f(z) - f(0) - f'(0)\, z - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, z^{n-1} \ .$$

Le résultat est donc vrai à l'ordre $n$. □

Pour qu'une fonction indéfiniment dérivable soit développable en série entière, il est nécessaire et suffisant que le reste $r_n(z)$ de la formule de Taylor tende vers 0. C'est vrai en particulier si les dérivées successives sont uniformément bornées, avec des bornes croissant au plus géométriquement.

**Proposition 4.** *Si $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$ et s'il existe $M$ et $a$ positifs tels que pour tout $n$ et pour tout $z \in ]-R,R[$,*

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant M\, a^n \ ,$$

*alors $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$.*

*Démonstration :* Sous cette hypothèse, on peut borner le reste $r_n(z)$ de la façon suivante.

$$|r_n(z)| \leqslant \int_0^z (z-t)^n \frac{Ma^n}{n!} = \frac{z^{n+1}Ma^n}{(n+1)!} \ .$$

Le reste $r_n(z)$ tend donc vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. □

Cette proposition s'applique par exemple aux fonctions sin et cos (dont toutes les dérivées sont bornées), mais aussi à la plupart des fonctions usuelles.

## 1.4 Développements usuels

Nous allons passer en revue quelques développements classiques, que vous connaissez probablement déjà depuis le chapitre sur les développements limités. Nous ne nous préoccuperons pas toujours de la détermination du rayon de convergence, que nous laissons au lecteur à titre d'exercice : il vaut 1 pour $(1+z)^\alpha$ et ses avatars, $+\infty$ pour $\exp(z)$ et ses avatars, etc.

Le calcul des dérivées successives en 0 est rarement le moyen le plus simple de calculer un développement en série entière. Une exception notable est $(1+z)^\alpha$, où $\alpha$ est un réel quelconque. Si $f(z) = (1+z)^\alpha$, les dérivées successives de $f$ sont :

$$\begin{array}{rcl} f'(z) &=& \alpha(1+z)^{\alpha-1} \\ f''(z) &=& \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2} \\ &\vdots& \\ f^{(n)}(z) &=& \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}\,. \end{array}$$

On obtient donc :

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha\, z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, z^n + \cdots$$

Dans le cas particulier où $\alpha$ est un entier positif, les dérivées successives sont nulles à partir d'un certain rang, puisque $(1+z)^\alpha$ est un polynôme. Dans ce cas, le développement se réduit à la formule du binôme de Newton que vous connaissez déjà. Les autres cas particuliers fréquemment rencontrés sont $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et ceux où $\alpha$ est un entier négatif.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+z} &=& 1 + \dfrac{1}{2}\, z - \dfrac{1}{8}\, z^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1} 1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n (n!)}\, z^n + \cdots \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+z}} &=& 1 - \dfrac{1}{2}\, z + \dfrac{3}{8}\, z^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n (n!)}\, z^n + \cdots \\[2ex] \dfrac{1}{(1+z)^k} &=& 1 - k\, z + \dfrac{k(k+1)}{2}\, z^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\, z^n + \cdots \end{array}$$

Du développement de $\frac{1}{\sqrt{1+z}}$, on déduit celui de $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, en remplaçant $z$ par $-z^2$. La primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ nulle en 0 est $\arcsin(z)$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}} &=& 1 + \dfrac{1}{2}\, z^2 + \dfrac{3}{8}\, z^4 + \cdots + \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, z^{2n} + \cdots \\[2ex] \arcsin(z) &=& z + \dfrac{1}{6}\, z^3 + \dfrac{3}{40}\, z^5 + \cdots + \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\, z^{2n+1} + \cdots \end{array}$$

Les principales techniques de calcul de développement en série entière sont d'une part les combinaisons linéaires et les changements de variables, d'autre part la dérivation et l'intégration. Par exemple, à partir de la série exponentielle, on obtient les développements de $\mathrm{e}^{-z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$, puis ceux des sinus et cosinus usuels et hyperboliques grâce aux formules d'Euler, que nous rappelons.

| | |
|---|---|
| $\sin(z) = \dfrac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}$ | $\cos(z) = \dfrac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2}$ |
| $\sinh(z) = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$ | $\cosh(z) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$ |

$$\begin{array}{lcl}
\exp(z) & = & 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \cdots \\
\exp(-z) & = & 1 - z + \dfrac{z^2}{2!} - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n z^n}{n!} + \cdots \\
\cosh(z) & = & 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
\sinh(z) & = & z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots + \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\
\exp(\mathrm{i}z) & = & 1 + \mathrm{i}z - \dfrac{z^2}{2!} - \mathrm{i}\dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} + \cdots \\
\exp(-\mathrm{i}z) & = & 1 - \mathrm{i}z - \dfrac{z^2}{2!} + \mathrm{i}\dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-\mathrm{i})^n z^n}{n!} + \cdots \\
\cos(z) & = & 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
\sin(z) & = & z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots
\end{array}$$

Tous les développements en série des fractions rationnelles et de leurs primitives peuvent s'obtenir à partir de la série géométrique. Considérons une fraction rationnelle du type $P(z)/Q(z)$, où $P$ et $Q$ sont deux polynômes, supposés premiers entre eux (fraction irréductible). Les *pôles* de la fraction sont les complexes qui annulent le dénominateur.

**Proposition 5.** *Soit $P(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle, telle que $Q(0) \neq 0$. Elle est développable en série entière sur $]-R, R[$, où $R$ est le plus petit module d'un pôle.*

$$R = \min\{\, |z|\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ Q(z) = 0\}\ .$$

Par exemple, bien qu'elle soit définie sur tout $\mathbb{R}$, la fraction $\frac{1}{1+z^2}$ n'est développable en série entière que sur $]-1, 1[$, car ses pôles sont i et $-$i.

*Démonstration :* Donner cette démonstration nous permettra de détailler une technique générale de calcul du développement en série des fractions rationnelles. Observons tout d'abord que si 0 est un pôle, alors la fraction n'est pas définie en 0, elle ne peut donc pas être développable sur un intervalle contenant 0.

La première étape consiste à décomposer la fraction en éléments simples. La partie entière est un polynôme, qui modifiera éventuellement les premiers termes de la série. Pour les besoins de la démonstration, nous utiliserons la décomposition dans $\mathbb{C}$, qui ne contient que des éléments simples du type $\frac{1}{(z-\rho)^k}$, où $\rho$ désigne un pôle. On écrit alors :

$$\frac{1}{(z-\rho)^k} = \frac{(-\rho)^{-k}}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^k} .$$

Or $\frac{1}{(1-z)^k}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

$$\frac{1}{(1-z)^k} = 1 + k\,z + \frac{k(k+1)}{2!}\,z^2 + \cdots + \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\,z^n + \cdots$$

En remplaçant $z$ par $\frac{z}{\rho}$, on obtient pour tout $z \in ]-|\rho|, |\rho|[$,

$$\frac{1}{(z-\rho)^k} = (-\rho)^{-k}\left(1 + k\,\frac{z}{\rho} + \frac{k(k+1)}{2}\,\frac{z^2}{\rho^2} + \cdots + \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\,\frac{z^n}{\rho^n} + \cdots\right)$$

Comme la fraction rationnelle est combinaison linéaire d'éléments simples, le résultat de la proposition se déduit du théorème 3. □

Voici un exemple détaillé.

$$\frac{z^3}{z^2+z-2} = -1 + z + \frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{8}{3}}{z+2} .$$

Cette fraction a deux pôles, 1 et –2. Elle est développable en série entière sur $]-1,1[$. Nous devons calculer séparément les développements des éléments simples.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3}}{z-1} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{3}\Big(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\Big) \\
\frac{\frac{8}{3}}{z+2} &= \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{-2}} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{z}{-2} + \frac{z^2}{(-2)^2} + \cdots + \frac{z^n}{(-2)^n} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

En ajoutant les deux séries, et en tenant compte de la partie entière pour les deux premiers termes, on obtient :

$$\frac{z^3}{z^2+z-2} = 0 + 0\,z + 0\,z^2 - \frac{1}{2}z^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{3} + \frac{(-2)^{2-n}}{3}\right)\,z^n + \cdots$$

Evidemment on pouvait prévoir que les premiers termes seraient nuls et développer $\frac{1}{z^2+z-2}$, puis décaler la série obtenue en remplaçant $z^n$ par $z^{n+3}$. Le lecteur vérifiera que le résultat est bien le même.

## 1.5 Résolution d'équations

Pour terminer, nous allons donner un petit aperçu de l'intérêt des séries entières comme technique de résolution d'équations récurrentes ou différentielles.

L'équation suivante se rencontre dans l'analyse de certains algorithmes de tri.

$$\forall n \geqslant 0 \;, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2^n \;,$$

avec $a_0 = 1$. Comment obtenir une expression explicite de $a_n$ ? Introduisons la série entière $\sum a_n\, z^n$ et notons $f(z)$ sa somme.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \;.$$

Pour obtenir une équation en $f$, on multiplie l'équation de récurrence par $z^n$ et on somme sur $n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, z^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\, z^n \;.$$

Il s'agit maintenant d'en déduire une équation en $f$. Pour cela observons que le premier terme de la série est $f(0) = a_0 = 1$. On a donc :

$$\frac{f(z)-1}{z} = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m\, z^{m-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^n \;.$$

On en déduit l'équation suivante.

$$\frac{f(z)-1}{z} = 2f(z) + \frac{1}{1-2z} \;,$$

dont la solution est :

$$f(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{z}{(1-2z)^2} \;.$$

Il suffit alors de développer $f$ en série entière pour retrouver les $a_n$.

$$f(z) = 1 + 3\,z + 8\,z^2 + \cdots + (n+2)2^{n-1}\,z^n + \cdots$$

On obtient donc $a_n = (n+2)2^{n-1}$.

Voici un exemple plus compliqué. Le nombre $a_n$ d'arbres binaires enracinés à $n$ sommets vérifie :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, a_{n-1-k} \;,$$

avec $a_0 = 1$. Notons $f(z)$ la somme de la série $\sum a_n\, z^n$. On multiplie l'équation de récurrence par $z^n$ et on somme pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, z^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} \\
&= z \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k\; a_{n-k-1}\, z^{n-k-1} \\
&= z \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_{n-k-1}\, z^{n-k-1} \\
&= z \Big( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k \Big) \Big( \sum_{m=0}^{+\infty} a_m\, z^m \Big) ,
\end{aligned}$$

soit :

$$f(z) - 1 = z(f(z))^2 \,.$$

Des deux solutions de cette équation, seule celle qui vaut 1 en 0 nous intéresse :

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \,.$$

Il reste à développer $f(z)$ en série entière, en utilisant le développement de $(1+z)^\alpha$. On obtient :

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n} \,.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante.

$$x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0 \tag{E}$$

Cherchons des solutions de (E) développables en série entière :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} \,.$$

En reportant ces séries dans l'équation (E), on obtient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

On commence par effectuer les changements d'indices nécessaires pour ramener tous les termes à $x^n$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 12 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

Si une fonction développable en série entière est nulle, ses coefficients doivent être nuls : on en déduit des équations particulières pour les premiers termes, et une équation de récurrence générale pour les termes suivants.

$$\begin{array}{rcl} 12a_0 & = & 0 \\ -6a_1 + 12a_1 & = & 0 \\ 2a_2 - 12a_2 + 12a_2 + a_0 & = & 0 \\ n(n-1)a_n - 6a_n + 12a_n + a_{n-2} & = & 0 \text{ pour } n \geqslant 3 \ . \end{array}$$

Les trois premières équations donnent $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. La quatrième s'écrit :

$$a_n(n-3)(n-4) + a_{n-2} = 0 \ .$$

Pour $n = 3$ et $n = 4$, elle n'apporte aucune information. Mais pour $n \geqslant 5$, elle permet d'exprimer tous les coefficients de la série en fonction de $a_3$ et $a_4$. Calculons d'abord les termes impairs :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \quad a_{2k+3} = -\frac{a_{2k+1}}{(2k-1)(2k)} \ .$$

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \quad a_{2k+3} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, a_3 \ .$$

On calcule de la même façon les termes pairs :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \quad a_{2k+4} = -\frac{a_{2k+2}}{(2k)(2k+1)} \ .$$

Soit par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \quad a_{2k+4} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, a_4 \ .$$

La série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini (application du corollaire 1). En sommant, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & a_3 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+3} + a_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+4} \\ & = & x^3 \left( a_3 \displaystyle\frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) \\ & = & x^3 (a_3 \cos(x) + a_4 \sin(x)) \ . \end{array}$$

Les deux fonctions $x \mapsto x^3 \cos(x)$ et $x \mapsto x^3 \sin(x)$ constituent une famille libre daans l'espace vectoriel des fonctions, donc leurs combinaisons linéaires constituent un espace vectoriel de dimension 2. Comme l'équation (E) est linéaire et du second ordre, nous avons trouvé toutes ses solutions sous forme de séries entières (ce n'est pas toujours le cas).

# 2 Entraînement

## 2.1 Vrai ou faux

**Vrai-Faux 1.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si $R$ est le rayon de convergence de la série $\sum a_n\, z^n$, alors la suite $(|a_n|\, r^n)$ tend vers 0, pour tout $r < R$.
2. ☐ Si $R$ est le rayon de convergence de la série $\sum a_n\, z^n$, alors la suite $(|a_n|\, R^n)$ est bornée.
3. ☐ Si $\sum a_n\, z^n$ converge, alors son rayon de convergence est le module de $z$.
4. ☒ Si $\sum a_n\, z^n$ converge mais n'est pas absolument convergente, alors son rayon de convergence est le module de $z$.
5. ☒ Si $\sum a_n\, z^n$ converge alors son rayon de convergence est supérieur ou égal au module de $z$.
6. ☐ Si $\sum a_n\, z^n$ diverge alors son rayon de convergence est strictement inférieur au module de $z$.
7. ☐ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$ et si $|z| > R$, alors la suite $(|a_n\, z^n|)$ tend vers $+\infty$.
8. ☒ Les rayons de convergence de $\sum a_n\, z^n$ et de $\sum n^4 a_n\, z^n$ sont égaux.
9. ☐ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$, alors le rayon de convergence de $\sum n^{-4} a_n\, z^n$ est strictement supérieur à $R$.
10. ☒ Si la suite $(|a_n|)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $+\infty$.
11. ☐ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\,(2z)^n$ est $2R$.
12. ☐ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$, alors le rayon de convergence de $\sum n a_n\,(2z)^n$ est strictement inférieur à $R$.
13. ☒ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^{2n}$ est $\sqrt{R}$.
14. ☐ Si le rayon de convergence de $\sum a_n\, z^n$ est $R$, et si $a_n \neq 0$ pour tout $n$, alors le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{a_n}\, z^n$ est $\frac{1}{R}$.
15. ☒ Les séries $\sum a_n\, z^n$ et $\sum (-1)^n a_n\, z^n$ ont le même rayon de convergence.
16. ☐ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum (-1)^n a_n\, z^n$ converge si et seulement si la série $\sum a_n\, z^n$ converge.
17. ☐ Si la série $\sum a_n\, z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

**Vrai-Faux 2.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Le rayon de convergence de $\sum(2^n + 3^n)\, z^n$ est $\frac{1}{3}$.
2. ☐ Le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n - 3^n}{5^n}\, z^n$ est $\frac{2}{5}$.
3. ☒ Le rayon de convergence de $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$ est $\frac{1}{4}$.
4. ☐ Le rayon de convergence de $\sum(n! - n^n)\, z^n$ est $> 0$.
5. ☒ Le rayon de convergence de $\sum n^n\, z^n$ est 0.
6. ☒ Le rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!}\, z^n$ est $\exp(-1)$.
7. ☒ Le rayon de convergence de $\sum z^{2n}$ est 1.
8. ☐ Le rayon de convergence de $\sum z^{2^n}$ est $+\infty$.

**Vrai-Faux 3.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors $z \mapsto f(2z)$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.
2. ☒ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors $z \mapsto f(z^2)$ est développable en série entière sur $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$.
3. ☐ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors $z \mapsto f(1 - z)$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.
4. ☐ Si $f$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0 alors il existe $R$ tel que $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.
5. ☒ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, alors $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.
6. ☒ Si $f$ est indéfiniment dérivable, de dérivées successives bornées au voisinage de 0 alors il existe $R$ tel que $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.
7. ☒ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, et si $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière sur un intervalle contenant 0.
8. ☒ La fonction tan est développable en série entière sur un intervalle contenant 0.
9. ☒ Si $f$ est une fonction paire, et si $\sum a_n\, z^n$ est son développement en série entière, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $a_{2k+1} = 0$.
10. ☐ Si $f$ est une fonction croissante, et si $\sum a_n\, z^n$ est son développement en série entière, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$.
11. ☒ La fonction $z \mapsto \frac{1}{2-z}$ est développable en série entière sur $]-2, 2[$.
12. ☐ La fonction $z \mapsto \frac{1}{(2-z)(1-z)}$ est développable en série entière sur $]-2, 2[$.
13. ☐ Il existe $R > 0$ tel que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z(2-z)}$ est développable en série entière sur $]-R, R[$.

**Vrai-Faux 4.** Parmi les égalités suivantes lesquelles sont correctes, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}\, z^n = z \exp(z)$
2. ☒ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}\, z^n = (z-1)\exp(z)$
3. ☐ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}\, z^n = (z-1)\exp(z) - 1$
4. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)}\, z^n = (z-1)\exp(z)$
5. ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{n!}\, z^n = (z^2-2z+1)\exp(z)$
6. ☒ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3-6n^2+8n-1}{n!}\, z^n = (z-1)^3\exp(z)$

**Vrai-Faux 5.** Parmi les égalités suivantes lesquelles sont correctes, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \cdots + \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{1-z/2}$
2. ☒ $\displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{2+z^2}$
3. ☐ $\displaystyle z + 6\,z^2 + \cdots + 2^{n-1}(2^n-1)\,z^n + \cdots = \frac{2z}{(1-2z)(1-4z)}$
4. ☐ $\displaystyle 2\,z + 24\,z^2 + \cdots + (2^n-1)(3^n-1)\,z^n + \cdots = \frac{2z-6z^3}{(1-z)(1-2z)(1-3z)(1-6z)}$
5. ☒ $\displaystyle (1 + z^3 + \cdots + z^{3n} + \cdots) - (z + z^4 + \cdots + z^{3n+1} + \cdots) = \frac{1}{1+z+z^2}$

**Vrai-Faux 6.** Parmi les égalités suivantes lesquelles sont correctes, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\frac{1-\cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2(n+1))!} + \cdots$
2. ☐ $\displaystyle\sin(z) + \sinh(z) = z + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} + \cdots$
3. ☒ $\displaystyle\arctan(z) - \frac{1}{z}\ln(1+z^2) = \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n(n-1)}{n(2n-1)}\, z^{2n-1} + \cdots$
4. ☐ $\displaystyle\frac{1}{(\sqrt{1+2z})^3} = 1 - 3z + 15\,z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{n!}\, z^n + \cdots$

5. ☒ $\ln(1+z+z^2) = \left(z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^n}{n} + \cdots\right) - \left(z^3 + \dfrac{z^6}{2} + \cdots + \dfrac{z^{3n}}{n} + \cdots\right)$

**Vrai-Faux 7.** On considère la suite de réels $(a_n)$, définie par $a_0 = a_1 = 0$, et pour tout $n \geq 0$, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 1$. On note $f(z)$ la somme de la série de terme général $a_n\, z^n$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $a_2 = 0$
2. ☒ $a_3 = 4$
3. ☒ $f(z)$ est une fraction rationnelle en $z$
4. ☐ La fraction rationnelle $f(z)$ a 3 pôles
5. ☐ $f(z)$ est solution de l'équation $z^2 f(z) - 3zf(z) + 2f(z) = \dfrac{1}{1-z}$
6. ☐ $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2(1-2z)}$
7. ☒ $f(z) = \dfrac{1}{1-2z} - \dfrac{1}{(1-z)^2}$
8. ☐ $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$
9. ☒ Le rayon de convergence de la série $\sum a_n\, z^n$ est $\frac{1}{2}$
10. ☐ $f(z) = (1 + 2z + 4z^2 + \cdots + 2^n z^n + \cdots) - (z + 2\, z^2 + \cdots + n\, z^n + \cdots)$
11. ☒ $f(z) = z^2 + 4\, z^3 + \cdots + (2^{n-1} - n)\, z^{n-1} + \cdots$
12. ☐ Pour tout $n \geq 0$, $a_n = 2^{n-1} - n$
13. ☒ Pour tout $n \geq 0$, $a_n = 2^n - (n+1)$

## 2.2 Exercices

**Exercice 1.** Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ dans les cas suivants.

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_n = \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_n = \ln(n)\ ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \mathrm{e}^{n^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\ .$$

**Exercice 2.** Soit $k$ un entier strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dbinom{nk}{n}$.

1. Calculer la limite de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

2. En admettant la formule de Stirling :
$$n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,,$$
calculer la limite de $\sqrt[n]{a_n}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

**Exercice 3.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ dans les cas suivants.
$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ;$$
$$a_n = \begin{cases} n! & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad a_n = \begin{cases} n & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}\,,\ n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ;$$
$$a_n = \begin{cases} n! & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}\,,\ n = k! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}\,,\ n = k^3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

**Exercice 4.**

1. Montrer que les séries entières $\sum n\, z^n$, $\sum n(n-1)\, z^n$ et $\sum n^2\, z^n$ ont pour rayon de convergence 1.
2. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, calculer la somme des séries
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n\ .$$

**Exercice 5.**

1. Montrer que la série entière $\sum \frac{1}{n}\, z^n$ a pour rayon de convergence 1.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, z^n$.
3. Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1}\, x^n\ .$$
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n}\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et calculer sa somme.
5. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum \frac{z^2}{n}\, \mathrm{e}^{-nz}$ converge.

**Exercice 6.** Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$. Soit $R$ le rayon de convergence de la série somme $\sum (a_n + b_n)\, z^n$.

1. Démontrer que $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

2. On suppose $R_a \neq R_b$. Démontrer que $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.
3. Déterminer $R_a$, $R_b$ et $R$ dans les cas suivants.

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; a_n = 1\,,\; b_n = \frac{1}{2^n} - 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; a_n = \frac{1}{2^n}\,,\; b_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\;;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; a_n = n!\,,\; b_n = n! - 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; a_n = n!\,,\; b_n = (n-1)!\;.$$

**Exercice 7.**

1. Démontrer que, pour tout $x \in ]1,1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k-1} x^n\;.$$

   Pour établir une formule de récurrence, on pourra soit dériver les deux membres, soit effectuer le produit par $\dfrac{1}{1-x}$.
2. Calculer les sommes des séries suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2^n}\;.$$

**Exercice 8.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $x \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n$-ième de $g$ en $x$ peut s'écrire

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\;,$$

   où $P_n$ est un polynôme en $x$.
2. Démontrer que pour tout $n$ la dérivée $n$-ième de $g$ en 0 est nulle.
3. Déduire de ce qui précède que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $g$ est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?
5. Soit $f$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Montrer que les fonctions $x \mapsto f(x) + g(x)$ $x \mapsto f(x) + xg(x)$, $x \mapsto f(x) + g'(x)$ ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.

**Exercice 9.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ un réel non entier.

1. Montrer que pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n\;.$$

2. En déduire que
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, x^n \,.$$
3. En déduire que
$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \,.$$
et
$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \,.$$

**Exercice 10.** Retrouver les développements en série entière suivants

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{z-4} &= -\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{16} - \cdots - \frac{z^n}{4^{n-1}} - \cdots \\
\frac{z^2}{z^2-4} &= -\frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{16} - \cdots - \frac{z^{2n}}{4^n} - \cdots \\
\frac{z^2}{z^2+4} &= \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{4^n} + \cdots \\
\frac{z}{2z^2-3z+1} &= z + 3\, z^2 + \cdots + (-1+2^n)\, z^n + \cdots \\
\frac{z^3+1}{z^2+z-2} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{3z^2}{8} + \cdots + \left(-\frac{2}{3} - \frac{7}{3}(-2)^{-n-1}\right) z^n + \cdots
\end{aligned}$$

**Exercice 11.** Calculer les développements en série entière des fonctions qui à $z$ asssocient $\cos^2(z)$, $\sin^2(z)$, $\sin(z)\cos(z)$, $\cosh^2(z)$, $\sinh^2(z)$, $\sinh(z)\cosh(z)$, et vérifier à partir de ces développements en série les formules trigonométriques suivantes.

$$\begin{array}{ll}
\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 & \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \\
\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) & \cosh(2z) = \cosh^2(z) + \sinh^2(z) \\
\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z) & \sinh(2z) = 2\sinh(z)\cosh(z)
\end{array}$$

**Exercice 12.** Utiliser les séries entières pour résoudre les équations de récurrence suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_0 = 0 \end{array}\right. \qquad \text{solution : } a_n = n$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = 2a_n \\ a_0 = 1 \end{array}\right. \qquad \text{solution : } a_n = 2^n$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = 2a_n + 3 \\ a_0 = 2 \end{array}\right. \qquad \text{solution : } a_n = -3 + 5\, 2^n$$

**Exercice 13.** Trouver une fonction $f$ développable en série entière en 0 sur $]-1,1[$, solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x) .$$

Solution : $f(0) = 0$ et pour tout $x$ tel que $|x| \in ]0,1[$ :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} .$$

**Exercice 14.** Soit $\alpha$ un réel et $f$ l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$f(t) = \cos(\alpha \arcsin(t)) .$$

1. Calculer $f'$ et $f''$. En déduire une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par $f$.
2. Chercher l'ensemble des solutions $y$ développables en série entière sur $]1,1[$, solution de l'équation de la question précédente.
3. En déduire que $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

**Exercice 15.**

1. Pour tout entier $n$, démontrer le résultat suivant (intégrale de Wallis) :

$$I_{2n} = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} .$$

   En utilisant la relation $\sin^{2n}(x) = \sin^{2n-2}(x)(1-\cos^2(x))$ puis une intégration par parties, on pourra établir la relation de récurrence $nW_{2n} = (n-1)W_{2n-2}$.

2. Justifier que pour tout $u \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} u^n .$$

3. Pour tout $x \in ]-1,1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t .$$

   Montrer que $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

**Exercice 16.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \binom{2n}{n} .$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n\, z^n$ est $\dfrac{1}{4}$.
2. Pour tout $f \in ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\ .$$

Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle

$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2\ .$$

## 2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

**Question 1.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Soit $r$ un réel strictement positif.

- $\boxed{\text{A}}$ Si $\sum a_n r^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge, pour tout $z$ tel que $|z| = r$.
- $\boxed{\text{B}}$ Si $\sum a_n r^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge, pour tout $z$ tel que $|z| < r$.
- $\boxed{\text{C}}$ Si $(a_n r^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ diverge, pour tout $z$ tel que $|z| \geqslant r$.
- $\boxed{\text{D}}$ Si $\sum a_n r^n$ converge absolument, alors $\sum a_n z^n$ converge, pour tout $z$ tel que $|z| \leqslant r$.
- $\boxed{\text{E}}$ Si $(|a_n| r^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge, pour tout $z$ tel que $|z| < r$.

**Question 2.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On note $R$ le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Soit $z$ un complexe.

- $\boxed{\text{A}}$ Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant |z|$.
- $\boxed{\text{B}}$ Si $R > |z|$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\boxed{\text{C}}$ Si $\sum a_n z^n$ converge et $\sum |a_n z^n|$ diverge, alors $R < |z|$.
- $\boxed{\text{D}}$ Si $\sum |a_n z^n|$ converge, alors $R > |z|$.
- $\boxed{\text{E}}$ Si $|z| = R$ alors $(|a_n z^n|)$ est bornée.

**Question 3.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On note $R$ le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

- $\boxed{\text{A}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum n^2 a_n z^n$ est $R/2$.
- $\boxed{\text{B}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum 2^n a_n z^n$ est $R/2$.
- $\boxed{\text{C}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 z^n$ est $R/2$.
- $\boxed{\text{D}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$.
- $\boxed{\text{E}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum n^2 a_n^2 z^{2n}$ est $R^2$.

**Question 4.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes. On note $R_a$ et $R_b$ leurs rayons de convergence respectifs.

- $\boxed{\text{A}}$ Le rayon de convergence de $\sum(a_n+b_n)z^n$ est $R_a+R_b$
- $\boxed{\text{B}}$ Le rayon de convergence de $\sum(a_n+b_n)z^n$ est au moins égal à $\min\{R_a,R_b\}$.
- $\boxed{\text{C}}$ Le rayon de convergence de $\sum(a_nb_n)z^n$ est au plus égal à $\min\{R_a,R_b\}$.
- $\boxed{\text{D}}$ Le rayon de convergence de $\sum(a_nb_n)z^n$ est au moins égal à $\max\{R_a,R_b\}$.
- $\boxed{\text{E}}$ Le rayon de convergence de $\sum(a_nb_n)z^n$ est au moins égal à $R_aR_b$.

**Question 5.**

- $\boxed{\text{A}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{2n}{3^n}z^n$ est $\frac{3}{2}$.
- $\boxed{\text{B}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{2^n}{3n}z^n$ est $\frac{1}{2}$.
- $\boxed{\text{C}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum(2^{-n}-3^n)z^n$ est 2.
- $\boxed{\text{D}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum(2^n)(3^{-n})z^n$ est $\frac{3}{2}$.
- $\boxed{\text{E}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum(2n+3^n)z^n$ est 1.

**Question 6.** $\boxed{\text{A}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum(2n)^nz^n$ est $\frac{1}{2}$.

- $\boxed{\text{B}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{n!}{(2n)!}z^n$ est 2.
- $\boxed{\text{C}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ est 4.
- $\boxed{\text{D}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{(2n)^2}{n!}z^n$ est $\frac{1}{4}$.
- $\boxed{\text{E}}$ Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{2^n}{(2n)!}z^n$ est infini.

**Question 7.** Soit $f$ une application.

- $\boxed{\text{A}}$ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors $z\mapsto f(3z)$ est développable en série entière sur $]-R,R[$.
- $\boxed{\text{B}}$ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors $z\mapsto f(z-1)$ est développable en série entière sur $]-R-1,R-1[$.
- $\boxed{\text{C}}$ Si $f$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0 alors il existe $R$ tel que $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$.
- $\boxed{\text{D}}$ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.
- $\boxed{\text{E}}$ Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors $f^2$ est développable en série entière sur $]-R,R[$.

**Question 8.**

$\boxed{\text{A}}$ $\forall z\in]-1,2[\,,\quad \dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z-2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2^{n+1})\,z^n$

$\boxed{\text{B}}$ $\forall z\in]-2,2[\,,\quad \dfrac{1}{z-2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2^n}\,z^n$

$\boxed{\text{C}}$ $\forall z\in]-2,2[\,,\quad \dfrac{1}{z+2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(-2)^{n+1}}\,z^n$

D $\forall z \in ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\,,\quad \frac{1}{2z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -2^{n+1}\, z^n$

E $\forall z \in ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\,,\quad \frac{1}{2z+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -(-2)^{n+1}\, z^n$

**Question 9.**

A $\forall z \in \mathbb{R}\,,\quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

B $\forall z \in \mathbb{R}\,,\quad \ln(z-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

C $\forall z \in ]-1,1[\,,\quad \arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$

D $\forall z \in \mathbb{R}\,,\quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

E $\forall z \in \mathbb{R}\,,\quad \tanh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

**Question 10.**

A $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}\, z^n = z\mathrm{e}^z$

B $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, z^n = \mathrm{e}^z - z$

C $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2}{n!}\, z^n = z\mathrm{e}^z + z$

D $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, z^n = z\mathrm{e}^z - z$

E $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}\, z^n = (z+1)\mathrm{e}^z$

Réponses : 1–BE 2–AB 3–BD 4–BE 5–BD 6–CE 7–DE 8–DE 9–AC 10–DE

## 2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

---

**Questions de cours :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes.

1. Soit $r$ un réel strictement positif. Démontrer que si la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z$ tel que $|z| < r$, la série entière $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente.

2. Définir le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.
3. On suppose que la suite de terme général $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers une limite finie non nulle, notée $l$. Montrer que $R = \dfrac{1}{l}$.
4. On suppose que la suite de terme général $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers 0. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente.
5. On suppose que la suite de terme général $\sqrt[n]{|a_n|}$ converge vers une limite finie non nulle, notée $l$. Montrer que $R = \dfrac{1}{l}$.

---

**Exercice 1 :**

1. Montrer que les séries entières $\sum z^n$ et $\sum \dfrac{1}{n} z^n$ ont pour rayon de convergence 1. Pour tout $x \in ]-1,1[$, donner la valeur de
$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\ .$$
2. Démontrer que la série produit $\left(\sum z^n\right)\left(\sum \dfrac{1}{n} z^n\right)$ a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $x \in ]-1,1[$,
$$S_1(x)S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n\ .$$
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ .$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_{n+1}}{c_n} = 1\ .$$
En déduire que la série de terme général $c_n$ a pour rayon de convergence 1.
4. Pour tout $x \in ]-1,1[$, on note
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, x^n\ .$$
Quel est le développement en série de $xf(x)$ ? En déduire que $f(x) - xf(x) = S_2(x)$ et retrouver le résultat de la question 2.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (quelconque) de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$b_n = a_0 + \cdots + a_n \ .$$
On note $R_a$ et $R_b$ les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$. Montrer que $R_b \geqslant \min\{R_a, 1\}$.
6. On suppose désormais que la suite $(a_n)$ tend vers 0 et que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que $R_a = R_b = 1$.
7. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \ .$$
Démontrer que pour tout $x \in ]-1, 1[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n = \frac{f(x)}{1-x} \ .$$

---

**Exercice 2 :** Le nombre moyen $a_n$ de comparaisons effectuées par l'algorithme de tri rapide Quicksort, pour une liste de $n$ nombres ordonnés au hasard vérifie $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$ :
$$na_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$n - 1 \leqslant a_n \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \ .$$
En déduire que la série entière $\sum a_n\, z^n$ a pour rayon de convergence 1.
2. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, x^n$.
3. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, on note $f$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) x^n = \frac{xf(x)}{1-x} \ .$$
(On pourra utiliser l'exercice précédent).
4. Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle
$$f'(x) = \frac{2f(x)}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^3} \ . \qquad \text{(E)}$$

5. On considère l'équation différentielle
$$y'(x) = \frac{2y(x)}{1-x} \; . \qquad \text{(H)}$$
Soit $y$ une solution de (H) développable en série entière en 0 :
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, x^n \; .$$
Montrer que les $b_n$ vérifient l'équation de récurrence $(n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 0$.
6. En déduire que pour tout $K \in \mathbb{R}$, la fonction $y$ définie par
$$y(x) = \frac{K}{(1-x)^2} \; ,$$
est solution de (H) sur $]-1,1[$.
7. Vérifier que l'unique solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $f(0) = 0$ est :
$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\Big( -\ln(1-x) - x \Big) \; .$$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$a_n = 2(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 4n \; .$$

## 2.5 Corrigé du devoir

**Questions de cours :**

1. Soit $M$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leqslant M$. Écrivons :
$$|a_n \, z^n| = |a_n| \, r^n \left|\frac{z^n}{r^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z^n}{r^n}\right| \; .$$
Si $|z| < r$, $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ et la série $\sum M \left|\frac{z^n}{r^n}\right|$ converge. Dons la série $\sum |a_n| \, z^n$ converge, par le théorème de comparaison des séries.
2. L'ensemble des réels positifs ou nul tels que la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée est non vide, car il contient 0. S'il est majoré alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n \, z^n$ est sa borne supérieure, sinon le rayon de convergence est infini.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$,
$$0 < l - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l + \varepsilon \; .$$

On en déduit par récurrence que

$$\Big(|a_{n_0}|(l-\varepsilon)^{-n_0}\Big)(l-\varepsilon)^n < |a_n| < \Big(|a_{n_0}|(l+\varepsilon)^{-n_0}\Big)(l+\varepsilon)^n \ .$$

Soit $r$ un réel tel que $0 \leqslant r < \frac{1}{l+\varepsilon}$. L'inégalité de droite entraîne que $|a_n|r^n$ est borné. Donc le rayon de convergence $R$ est tel que

$$R \geqslant \frac{1}{l+\varepsilon} \ .$$

Si $r$ est tel que $r > \frac{1}{l-\varepsilon}$, L'inégalité de gauche entraîne que $|a_n|r^n$ tend vers l'infini. Donc

$$R \leqslant \frac{1}{l-\varepsilon} \ .$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $R = 1/l$.

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \varepsilon \ .$$

On en déduit par récurrence que

$$|a_n| < \Big(|a_{n_0}|\varepsilon^{-n_0}\Big)\varepsilon^n \ .$$

Soit $r$ un réel tel que $0 \leqslant r < \frac{1}{\varepsilon}$. L'inégalité de droite entraîne que $|a_n|r^n$ est borné. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $|a_n|r^n$ est borné pour tout $r > 0$. Donc d'après la question 1, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ (le rayon de convergence est infini).

5. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon \ ,$$

donc

$$(l-\varepsilon)^n < |a_n| < (l+\varepsilon)^n \ .$$

Soit $r$ un réel tel que $0 \leqslant r < \frac{1}{l+\varepsilon}$. L'inégalité de droite entraîne que $|a_n|r^n$ est borné. Donc le rayon de convergence $R$ est tel que

$$R \geqslant \frac{1}{l+\varepsilon} \ .$$

Si $r$ est tel que $r > \frac{1}{l-\varepsilon}$, L'inégalité de gauche entraîne que $|a_n|r^n$ tend vers l'infini. Donc

$$R \leqslant \frac{1}{l-\varepsilon} \ .$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $R = 1/l$.

**Exercice 1 :**

1. Il y a plusieurs manières de procéder. La plus simple consiste à écrire la limite du rapport de deux termes successifs.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \;.$$

Les sommes suivantes sont des résultats du cours.

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \;.$$

2. D'après le cours, la série produit $(\sum a_n\, z^n)(\sum b_n\, z^n)$ a un rayon de convergence au moins égal au plus petit des deux rayons de convergence de $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, et son coefficient d'ordre $z$ est :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Si on applique le résultat à $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n > 1$, on obtient

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \;,$$

et le rayon de convergence de $\sum c_n\, z^n$, est $\geqslant 1$. Mais comme $c_n \geqslant 1$, il est aussi $\leqslant 1$. Donc il est égal à 1. Pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, x^n = S_1(x) S_2(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \;.$$

3. On observe que $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)c_n}$$

Comme $c_n \geqslant 1$, le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers 1. Donc le rayon de convergence de $\sum c_n\, z^n$ est $\frac{1}{1} = 1$.

4. Pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, x^{n+1} = \sum_{m=2}^{+\infty} c_{m-1}\, x^m \;.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (c_n - c_{n-1})\, x^n \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n \\ &= S_2(x) = -\ln(1-x)\ . \end{aligned}$$

L'équation $f(x) - xf(x) = (1-x)f(x) = -\ln(1-x)$, redonne le résultat de la question 2.

5. Par le résultat déjà rappelé, le produit de séries $(\sum a_n\, z^n)(\sum z^n)$ a un rayon de convergence au moins égal à $\min\{R_a, 1\}$, et son terme général est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1 = a_0 + \cdots + a_n = b_n\ .$$

6. Si la suite de termes positifs $(a_n)$ tend vers 0, elle est bornée. Donc par définition du rayon de convergence, $R_a \geqslant 1$. Si $R_a$ était strictement supérieur à 1, alors la série $\sum a_n\, z^n$ convergerait pour $z = 1$, ce qui n'est pas le cas. Donc $R_a = 1$. Calculons $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a_{n+1}}{b_n}\ .$$

Or $a_{n+1}$ tend vers 0 et $b_n \geqslant a_0$, donc $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tend vers 1. Donc $R_b = 1$.

7. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\ ,$$

donc

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^{n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} b_{m-1}\, x^m\ .$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) - xg(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= f(x) \;. \end{aligned}$$

L'équation $g(x) - xg(x) = f(x)$ entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n = g(x) = \frac{f(x)}{1-x} \;.$$

---

**Exercice 2 :**

1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$, l'équation de récurrence donne $na_n \geqslant n(n-1)$, d'où $a_n \geqslant n-1$. Nous montrons la majoration par récurrence. Supposons qu'elle soit vraie pour $k \leqslant n-1$.

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant (n-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - k \\ &= (n-1) + \frac{1}{n} \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{n-1}{2} \left( 1 + \frac{2n-1}{3} \right) \\ &\leqslant \frac{n(n-1)}{2} \;. \end{aligned}$$

(Pour un algorithme de tri, la majoration correspond cas le pire, celui où toutes les comparaisons possibles sont effectuées).
En prenant la limite du rapport de deux termes successifs, on vérifie que les deux séries $\sum (n-1)\, z^n$ et $\sum \frac{n(n-1)}{2}\, z^n$ ont pour rayon de convergence 1. Par le théorème de comparaison des séries, la série $\sum a_n\, z^n$ a aussi pour rayon de convergence 1.

2. La série $\sum n(n-1)\, x^{n-2}$ est la dérivée seconde de la série géométrique. Pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3} \;.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \,.$$

3. Le raisonnement a déjà été effectué dans l'exercice précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$b_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \,.$$

Comme $b_n \geqslant a_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n\, z^n$ est inférieur ou égal à 1. La majoration de la question 1 montre que $b_n < \frac{n^2(n-1)}{2}$, ce qui entraîne que le rayon de convergence de $\sum b_n\, z^n$ est égal à 1.
Pour tout $x \in ]-1, 1[$, posons

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^n \,,$$

donc

$$xg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^{n+1} = \sum_{m=2}^{+\infty} b_{m-1}\, x^m \,.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) - xg(x) &= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (b_n - b_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= f(x) \,. \end{aligned}$$

L'équation $g(x) - xg(x) = f(x)$ entraîne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^n = g(x) = \frac{f(x)}{1-x} \,,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^{n+1} = g(x) = \frac{xf(x)}{1-x} \,,$$

4. La série $\sum na_n\, z^{n-1}$ est la dérivée de la série $\sum a_n\, z^n$. Donc pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1} = xf'(x)\ .$$

En multipliant l'équation de récurrence par $z^n$ et en sommant, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) x^n\ .$$

D'après ce qui précède, ceci entraîne pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2xf(x)}{1-x}\ .$$

D'où l'équation différentielle cherchée.

5. Si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\ ,$$

alors,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}\, x^n\ ,$$

et

$$(1-x)y'(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}\, x^n \right) - \left( \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n\, x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)b_{n+1} - nb_n)\, x^n\ .$$

L'égalité des développements en série de $(1-x)y'(x)$ et de $2y(x)$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)b_{n+1} - nb_n = 2b_n \iff (n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 0\ .$$

6. De l'équation précédente, on déduit par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = (n+1)b_0$. La série $\sum (n+1)\, z^n$ est dérivée de la série géométrique et a pour rayon de convergence 1. On en déduit que pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$y(x) = b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n = \frac{b_0}{(1-x)^2}\ .$$

7. On pourrait effectuer une vérification à la main, mais ayant la solution de l'équation homogène (H), il est aussi simple d'utiliser la méthode de variation de la constante :

$$y(x) = \frac{K(x)}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad y'(x) = \frac{K'(x)}{(1-x)^2} + \frac{2K(x)}{(1-x)^3}\ .$$

En identifiant les deux membres de l'équation :

$$K'(x) = \frac{2x}{1-x} = 2\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) .$$

Donc :

$$K(x) = 2(-x + \ln(1-x) + k) \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\Big( - x - \ln(1-x) + k\Big) .$$

La condition $y(0) = 0$ conduit bien à la solution annoncée.

8. Il ne reste plus qu'à développer en série entière la fonction de la question précédente. On effectue pour cela le produit des deux séries :

$$\frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)\, x^n \quad \text{et} \quad - x - \ln(1-x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n .$$

Le terme en $x^n$ du produit est nul pour $n = 0$ et $n = 1$, et pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2(n-k+1)}{k} \\ &= 2(n+1)\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 2(n-1) \\ &= 2(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 4n . \end{aligned}$$

# 3 Compléments

## 3.1 Le binôme de Newton

Voici ce qu'écrivait Abel en 1826.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci :

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots n}x^n + \text{etc.}$$

Lorsque $m$ est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque $m$ n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribue à $m$ et $x$. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \quad \text{et} \quad 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de $m$ et de $x$, dépend l'égalité des valeurs numériques des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente ; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a pas même examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même qu'on *suppose* l'existence de l'équation ci-dessus, il reste pourtant à chercher la *valeur* de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1 + mx + \text{etc.}$ n'en a qu'une.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la résolution complète du problème suivant :

« Trouver la somme de la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots n}x^n + \text{etc.}$$

pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de $x$ et de $m$ pour lesquelles la série est convergente.

Et effectivement, pour la première fois depuis un siècle et demi, la formule du binôme était correctement démontrée, en toute généralité. Abel n'était pas le premier à constater le manque de rigueur des traitements antérieurs. Les premiers articles démontrant correctement des convergences sont ceux de Gauss en 1812 pour la série hypergéométrique puis Bolzano en 1816, également pour la série binomiale.

Fervents lecteurs de compléments comme nous vous savons, vous n'ignorez pas que la « formule de Newton » pour un exposant entier était connue des mathématiciens de la Renaissance ; avant eux des arabes, avant eux des chinois… et avant eux des indiens. La réussite de Newton est de l'avoir étendue aux exposants rationnels, positifs ou négatifs. Pour Newton, la formule était plus un algorithme d'approximation qu'une série entière à notre sens. Il n'était pas question bien sûr de convergence, et la condition $|x| < 1$ restait implicite. Il est difficile de savoir si Newton était bien le premier : la première publication de la formule n'est pas de lui mais de James Gregory, en 1670. Newton assura plus tard qu'il s'agissait d'un de ses tous premiers travaux mathématiques, élaboré à partir de l'*Arithmerica Infinitorum* de John Wallis [1]. Encore une production de ces deux années magiques entre l'été 1665 et la rentrée 1667, où retiré à la campagne à cause de l'épidémie de peste qui avait entraîné la fermeture des universités, il avait découvert rien moins que le calcul différentiel, le télescope à réflexion, la gravitation universelle et la composition de la lumière.

## 3.2 La méthode des séries

Voici un extrait de l'article « Quadrature » de l'Encyclopédie, écrit par d'Alembert en 1751.

> Quoique la quadrature des figures, sur-tout celle du cercle, ait été l'objet de l'application des plus fameux mathématiciens de l'antiquité, on peut dire qu'on n'a rien fait de considérable sur cette matière, que vers le milieu du dernier siecle ; savoir en 1657, que MM. Neil & Brounker, & après eux M. Christophe Wren, ont trouvé les moyens de démontrer géométriquement l'égalité de quelques espaces curvilignes courbes, avec des espaces rectilignes.
>
> Quelques temps après, plusieurs géomêtres, tant anglois que des autres nations, firent les mêmes tentatives sur d'autres courbes, & réduisirent le problême au calcul analytique. Mercator en publia pour la premiere fois l'essai en 1688, dans une démonstration de la quadrature de l'hyperbole de milord Brounker, dans laquelle il se servit de la méthode de Wallis pour réduire une fraction en une suite infinie par le moyen de la division.
>
> Il paroît cependant, pour le dire en passant, que M. Newton avoit déja découvert le moyen de trouver la quadrature des courbes par sa méthode

1. J.L. Coolidge : The story of the binomial theorem *The American Mathematical Monthly 56(3) p. 147–157 (1949)*

des fluxions, avant l'année 1668.

« Pour le dire en passant », Newton en inventant le calcul différentiel, était passé à pas de géant de la quadrature aux intégrales, et des intégrales aux équations différentielles. Une fois celles-ci établies, il fallait bien en chercher des solutions. Songez qu'à l'époque, on ne connaissait guère d'autres fonctions que les polynômes. Le calculateur pragmatique qu'était Newton, allait donc chercher les solutions de ses équations par un algorithme itératif, en calculant des termes successifs sous forme de puissances croissantes de la variable, quitte à laisser dans le flou la question de la convergence du dit algorithme.

Voici pour vous donner une idée de la méthode, le premier exemple que traite Newton. Nous le reproduisons dans sa version actualisée par D. Tournès [2]. Considérons l'équation différentielle

$$y' = 1 - 3x + x^2 + (1+x)y \;.$$

Prenons $y_0 = 0$ comme première approximation de la solution. En substituant dans le second membre $y$ par 0, on obtient $y' = 1 - 3x + x^2$, soit à l'ordre 0 $y' = 1$, d'où l'approximation à l'ordre 1 $y_1 = x$. Substituons $y$ par $y_1 = x$ dans le second membre : $y' = 1 - 2x + 2x^2$. À l'ordre 1, $y' = 1 - 2x$, donc $y_2 = x - x^2$. Nouvelle substitution, $y' = 1 - 2x + x^2 + x^3$, soit $y' = 1 - 2x + x^2$ à l'ordre 2, et donc $y_3 = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$. Et ainsi de suite.

Newton est persuadé d'avoir trouvé la méthode ultime. Dans la traduction de Buffon, l'alinéa XLI de la « Méthode des fluxions et des suites infinies, par M. le Chevalier Newton » vaut son pesant d'auto-satisfaction.

> Ainsi j'ai donc achevé ce Problême épineux & le plus difficile de tous les Problêmes ; mais outre cette Méthode générale dans laquelle j'ai compris toutes les Difficultés, il y en a d'autres particulières plus courtes & qui facilitent quelquefois l'Opération ; le Lecteur ne sera pas fâché d'en voir ici quelques essais.

L'autre inventeur du calcul différentiel, Leibniz, n'était pas en reste : lui aussi avait vu la possibilité d'utiliser les séries pour résoudre des équations différentielles, mais ce n'était pas sa seule approche. Son point de vue était légèrement différent de celui de Newton qui ne se préoccupait que de calcul numérique. Voici ce qu'il écrivait en 1693.

> Alors qu'autrefois les moyens employés pour trouver des Séries infinies ont été, suivant l'exemple de leur inventeur Nicolas Mercator du Holstein, les divisions et, selon l'exemple du Grand Géomètre Isaac Newton, les extractions, il m'a semblé qu'on pouvait les obtenir plus aisément et de manière plus universelle en supposant connue la série recherchée, de telle sorte que les coefficients des termes qu'elle comporte soient déterminés progressivement. Une propriété de la courbe étant donnée, que ce soit par une formule

2. D. Tournès : L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires 1671–1914 (Chapitre 2), Thèse de doctorat de l'université Paris 7 (1996)

> du calcul ordinaire, de calcul intégral, différentiel ou différentio-différentiel même très complexe, on peut toujours aboutir à une série exprimant ce qu'on cherche, exactement, si on considère la série tout entière, par une approximation aussi précise qu'on veut, si on en prend une partie.

Il est difficile de dater exactement les découvertes, et la longue polémique sur l'antériorité, qui a opposé les mathématiciens britanniques à ceux du continent pendant tout le XVIII$^{\text{e}}$ siècle n'a pas été tranchée.

Dès les premières années, le « Grand Géomètre Isaac Newton » semble s'être méfié de son concurrent. Dans la Lettre à Oldenburg du 3 novembre 1676, Newton prend date en envoyant à destination de Leibniz le message chiffré suivant.

5accdæ10effh11i4l3m9n6oqqr8s11t9v3x : 11ab3cdd10eæg10ill4m7n6o3p3q6r5s11t8vx 3acæ4egh5i4l4m5n8oq4r3s6t4v, aaddæeeeeeiijmmnnooprrrsssssttuu.

En 1712, la signification du message chiffré fut dévoilée.

> Une méthode consiste à extraire une quantité fluente d'une équation qui contient en même temps sa fluxion ; une autre à supposer une série pour l'une quelconque des quantités inconnues, de laquelle les autres peuvent être convenablement déduites, et à rassembler les termes homologues de l'équation résultante, de façon à déterminer les termes de la série supposée.

Cette anecdote laissait Henri Poincaré dubitatif en 1908.

> On raconte que Newton communiqua à Leibniz un anagramme à peu près comme ceci : aaaaabbbeeeeii, etc. Leibniz, naturellement, n'y comprit rien du tout ; mais nous qui avons la clef, nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne : « Je sais intégrer toutes les équations différentielles », et nous sommes amenés à nous dire que Newton avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions.

## 3.3 Libre comme Euler

Pietro Mengoli (1626–1686), professeur à l'université de Bologne, savait démontrer que la somme des inverses d'entiers est infinie. En 1650, il avait posé le problème de la détermination de la somme exacte des inverses de carrés d'entiers, qu'il savait majorer avec l'argument suivant.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 + 1 = 2\ .$$

Repris par Jacques Bernouilli dans « Positiones arithmeticae de seriebus infinitis » publié à Bâle en 1689, le « problème de Bâle » résiste aux tentatives des mathématiciens de toute l'Europe pendant plusieurs décennies[3]. En 1730, Stirling publie la valeur

3. J.-P. Friedelmeyer : Euler, l'art de chercher, découvrir, inventer, *Bulletin APMEP 473, p. 867–879 (2007)*

approchée 1.644934065, obtenue par une méthode d'accélération de convergence. Mais ce n'était pas le résultat exact.

En 1735, Euler, alors âgé de 28 ans, donne la réponse :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

La méthode qui le conduit à cette découverte est typique d'Euler : inventive, élégante, puissante. Elle lui permet de calculer bien d'autres sommes, comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\ ;\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\ ;\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

Alors, même si la justification rigoureuse laisse à désirer, pourquoi bouder notre plaisir devant tant de virtuosité ?

Nous allons donner une version simplifiée de l'argument, qui ne suit pas à la lettre l'article original, mais en respecte les idées principales. Euler part du développement en série entière de $\sin(x)$ :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Les zéros de $\sin(x)$ sont les mutiples de $\pi$ : $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Si on divise par $x$ pour se débarrasser de la racine nulle, les nombres de la forme $k\pi$, pour $k \neq 0$ sont les racines du « polynôme infini » :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots$$

Comme il n'y a que des termes pairs, les nombres de la forme $k^2\pi^2$, pour $k \in \mathbb{N}$ sont les racines du « polynôme infini »

$$1 - \frac{1}{3!}y + \frac{1}{5!}y^2 - \frac{1}{7!}y^3 + \cdots$$

Considérons maintenant un polynôme (fini) à $n$ racines $r_1, \ldots, r_n$ :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n}(r_i - X)\ .$$

Son terme constant est $a_0 = (-1)^n a_n \prod r_i$, tandis que le coefficient du terme en $X$ est :

$$a_1 = (-1)^{n-1} a_n \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} r_j\ .$$

L'opposé du rapport du terme en $X$ au terme constant est donc la somme des inverses des racines :

$$-\frac{a_1}{a_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \;.$$

Mettons que ça marche aussi pour les polynômes infinis, c'est-à-dire pour les séries :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots$$

Il n'y a plus qu'à multiplier par $\pi^2$ et le tour est joué. Ah, si seulement les mathématiques pouvaient être aussi faciles pour vous que pour Euler... !

## 3.4 Produits infinis

Étendre aux développements en séries entières les propriétés des polynômes était une des astuces favorites d'Euler. Dans la même logique, connaissant les zéros d'une fonction, qui oserait l'empêcher d'écrire cette fonction comme un produit de monômes ? Par exemple, les valeurs de $x$ qui annulent $\sin x$ sont les $k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut donc s'attendre à retrouver dans $\sin x$ un facteur $x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, deux facteurs $(x - k\pi)$ et $(x + k\pi)$, soit encore un facteur proportionnel à $(x^2 - k^2\pi^2)$. Il se trouve que ça marche, et la formule porte même le nom de « produit d'Euler ».

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) \;.$$

N'en déduisez pas pour autant qu'il suffit d'écrire n'importe quoi d'intuitivement justifiable pour que ce soit mathématiquement correct. Voici comment débute le « Mémoire sur l'application du calcul des résidus à l'évaluation et à la transformation des produits composés d'un nombre infini de facteurs » lu par Cauchy à l'Académie des Sciences le 31 août 1829.

> On sait qu'une fonction entière de la variable $x$ peut toujours être décomposée en facteurs linéaires qui, égalés séparément à zéro, fournissent les diverses racines de l'équation algébrique, dont le premier membre serait précisément la fonction dont il s'agit. Cette propriété des fonctions entières subsiste pour quelques fonctions transcendantes. Ainsi, par exemple, $\sin x$ et $\cos x$ sont décomposables en facteurs linéaires, qui, égalés séparément à zéro, fournissent les diverses racines des équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Mais on se tromperait si l'on attribuait la propriété ci-dessus énoncée à toute espèce de fonctions, et il peut arriver que le produit $P$ de tous les facteurs linéaires correspondant aux différentes valeurs de $x$, pour lesquels une fonction transcendante s'évanouit, ne soit pas équivalent ni même proportionnel à cette fonction. Ainsi, en particulier, les seules valeurs de $x$, propres à faire évanouir la fonction $\mathrm{e}^x - 1$ sont comprises dans les formules
>
> $$x = 0 \qquad x = \pm n\pi\sqrt{-1} \;,$$

> $n$ étant un nombre entier quelconque, et cependant le produit $P$ de $x$ par tous les facteurs linéaires de la forme
>
> $$1 \pm \frac{x}{n\pi\sqrt{-1}}$$
>
> n'est pas équivalent ni même proportionnel à $\mathrm{e}^x - 1$. Mais on a dans ce cas
>
> $$\mathrm{e}^x - 1 = P\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\ ,$$
>
> en sorte que, pour obtenir la fonction transcendante $\mathrm{e}^x - 1$ il faut multiplier le produit $P$ par un nouveau facteur $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ qui n'est point linéaire, ni décomposable en facteurs linéaires déterminés, et qui ne s'évanouit pour aucune valeur finie de la variable $x$. On voit donc que les principes qui servent de base à la décomposition des fonctions entières en facteurs linéaires, ne sauraient s'appliquer aux fonctions transcendantes.

Tant valait que ce soit dit !

## 3.5 Les geôles de l'Inquisition

Pour une fois, nous allons rendre hommage à un mathématicien portugais : José Anastacio da Cunha (1744–1787) [4]. Son manuel d'enseignement, « Principes mathématiques », est un modèle de concision, de rigueur et de clarté. Il y balaye, en moins de 300 pages, exemples et problèmes corrigés compris, l'ensemble des connaissances mathématiques de son temps, dans un style qui annonce les cours de Cauchy ou Legendre, plus qu'il ne rappelle ceux d'Euler ou d'Alembert. Le « livre XI » (douze pages seulement) traite les séries entières. Bien sûr, la définition laisse un peu à désirer.

> Toute série dont on peut augmenter le nombre de termes autant qu'on veut, soit parce que la loi de continuation en est donné d'avance, soit parce que les premiers termes composent toujours de la même manière ceux qu'ils précèdent, s'appelle *série convergente*, pourvu qu'en se bornant à un nombre donné de premiers termes, on puisse négliger les autres sans erreur considérable. En pareils cas, après avoir écrit assez de termes pour en indiquer la loi de continuation, on désigne la somme de ceux qu'on néglige, par un etc. mis à la suite des premiers termes.

La suite, par contre, est impeccable. Da Cunha commence par démontrer la convergence de la série géométrique pour une variable inférieure à 1. Il en déduit la convergence de la série exponentielle, puis démontre les principales propriétés des puissances (y compris la formule du binôme), avant de définir le logarithme et d'en démontrer les propriétés. Le tout sans un mot inutile.

4. A.P. Youschkevitch : J.A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale *Revue d'histoire des sciences 26(1) p. 3–22 (1973)*

Une telle maîtrise laisserait augurer des travaux de tout premier ordre. Mais alors pourquoi da Cunha n'a-t-il laissé à la postérité que ses notes de cours ? La traduction en français par un de ses élèves et publiée à Bordeaux en 1811, commence par ces mots du traducteur.

> Les premiers livres des *Principes mathématiques* étaient connus à Lisbonne, si je me le rappelle bien, dès 1782 : c'est à peu près à cette époque que M. da Cunha les composait et les faisait imprimer à l'usage du collège royal de Saint-Georges, dont il était alors le directeur. On les y expliquait sous sa direction, au fur et à mesure qu'ils sortaient de la presse. Mais ce collège ayant essuyé des vicissitudes qui entraînèrent la suppression de l'emploi que M. da Cunha y occupait, l'impression du reste de l'ouvrage éprouva des retards, et ne fut terminée qu'en 1787 : il en corrigea la dernière épreuve la veille même de sa mort. On doit regretter que les infortunes de toute espèce, ainsi que les souffrances presque continuelles qui l'affligèrent pendant les dernières années de sa vie, ne lui aient point permis de publier également plusieurs autres ouvrages qu'il a laissés dans ses papiers, et que ses amis estiment comme autant de chefs-d'œuvres de goût et de profondeur.

Des « infortunes de toute espèce » ? Sa vie avait pourtant commencé sous les meilleurs auspices. Sous le règne de José Ier (1750–1777) des réformes antiféodales et anticléricales avaient limité le pouvoir de l'Inquisition, dissous l'ordre des jésuites, et réorganisé l'instruction publique. Tout jeune militaire, les capacités de da Cunha avait été remarquées du ministre, le Marquis de Pombal, qui l'avait nommé professeur de géométrie à l'université de Coimbra. Il ne put y enseigner que 4 ans. En 1777, la mort de José Ier fut suivie du retour au pouvoir des forces réactionnaires. La destitution de son protecteur marqua le début des déboires de da Cunha. Sur ordre de l'Inquisition de Coimbra, il fut incarcéré. On l'accusa d'être adepte d'écrivains comme « l'apostat Voltaire » et autres ennemis de la religion catholique, et le Conseil général de l'Inquisition le condamna à 3 ans de prison. Il en sortit en 1781, mais ne guérit jamais de l'épreuve : très affaibli, il mourut 6 ans plus tard à seulement 43 ans.

## 3.6 Une mise en garde de Cauchy

En 1822, Cauchy publie au Bulletin de la Société Philomatique « Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles ». En voici les premières lignes.

> Pour découvrir et démontrer les propriétés les plus remarquables des fonctions, on a souvent employé leur développement en séries, ou suites infinies, c'est-à-dire composées d'un nombre infini de termes ;
>
> [. . . ]
>
> Toutefois, en remplaçant des fonctions par des séries, on suppose implicitement qu'une fonction est complètement caractérisée par un développement

composé d'un nombre infini de termes, au moins tant que ces termes obtiennent des valeurs finies. Par exemple, lorsqu'on substitue à la fonction $f(x)$ la série de MacLaurin, et que l'on écrit en conséquence

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots \ , \qquad (1)$$

on suppose qu'à un système donné de valeurs finies des quantités

$$f(0)\,,\ f'(0)\,,\ f''(0)\ \ \ldots$$

correspond toujours une valeur unique de la fonction $f(x)$. Considérons pour fixer les idées, le cas le plus simple, celui où les quantités $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ s'évanouissent toutes à la fois. Dans cette hypothèse on devra, ce semble, conclure de l'équation (1) que la fonction $f(x)$ s'évanouit elle-même. Néanmoins cette conclusion peut n'être pas exacte. En effet, si on prend

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\ ,$$

on trouvera

$$f(0) = 0\,,\ f'(0) = 0\,,\ f''(0) = 0\,,\ \ldots$$

[. . . ]

Il suit de ces remarques qu'à une seule série, même convergente, correspond une infinité de fonctions différentes les unes des autres. Il n'est donc pas permis de substituer indistinctement les séries aux fonctions, et pour être assuré de ne commettre aucune erreur, on doit limiter cette substitution au cas où les fonctions, étant développables en séries convergentes, sont équivalentes aux sommes de ces séries. Sous toute autre hypothèse, les séries ne peuvent être employées avec une entière confiance qu'autant qu'elles se trouvent réduites à un nombre fini de termes, et complétées par des restes dont on connaît des valeurs exactes ou approchées.

Et dire que, depuis presque deux siècles, c'est toujours le même contre-exemple que l'on sert aux étudiants !