

Théorie élémentaire de l'intégration

Jean-Pierre Demailly, Didier Piau et Bernard Ycart

Ignorer la théorie de l'intégration n'a jamais empêché personne de calculer des primitives et des intégrales ; les techniques de calcul font d'ailleurs l'objet d'un chapitre indépendant dans ce cours. Ce que vous trouverez ici est assez théorique et difficile. N'espérez pas tout comprendre si vous n'avez pas auparavant bien assimilé l'art de couper les epsilons en quatre. Un objectif minimal et raisonnable est d'apprendre à reconnaître des sommes de Riemann quand vous en rencontrerez et de savoir calculer leurs limites.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Sommes de Riemann	1
1.2	L'intégrale d'une fonction	4
1.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale	8
1.4	Le théorème fondamental de l'Analyse	12
1.5	Calcul à l'aide de primitives	13
1.6	Encadrements par des fonctions en escalier	14
2	Entraînement	22
2.1	Vrai ou faux	22
2.2	Exercices	24
2.3	QCM	27
2.4	Devoir	30
2.5	Corrigé du devoir	32
3	Compléments	37
3.1	Archimède et la quadrature de la parabole	37
3.2	La famille ibn Qurra	39
3.3	Calcul numérique des intégrales	40
3.4	Les différentes intégrales	41
3.5	La mésaventure de Chasles	43

1 Cours

1.1 Sommes de Riemann

Dans tout le chapitre, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe horizontal est l'ensemble des couples (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pour une fonction f suffisamment régulière, nous souhaitons évaluer l'aire de cette portion de plan, en comptant positivement les surfaces situées au-dessus de l'axe horizontal, et négativement celles situées au-dessous (figure 1). Nous parlerons de l'*aire algébrique située sous le graphe de f* .

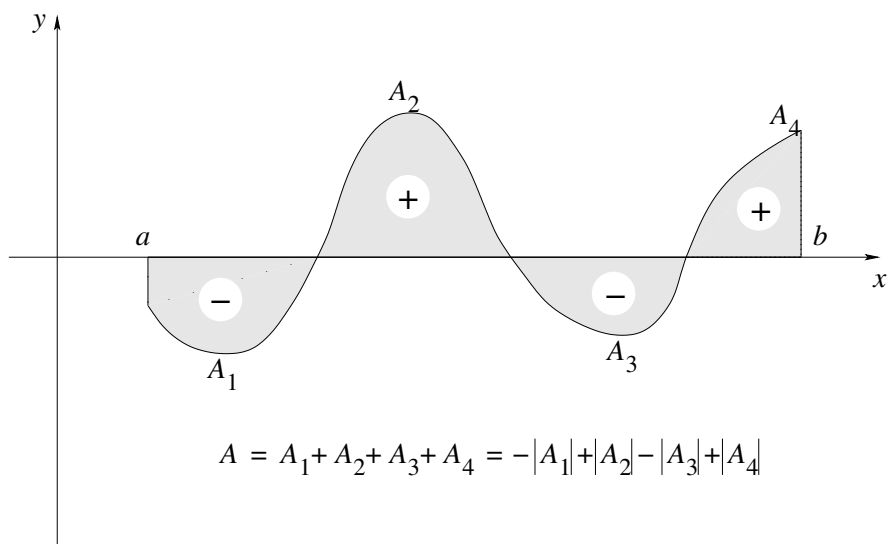


FIGURE 1 – Aire algébrique située sous le graphe de f .

L'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ au moyen d'une subdivision puis de sommer des aires de rectangles basés sur les intervalles de la subdivision.

Définition 1.

1. On appelle subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$, la donnée de $n + 1$ points

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b,$$

et de n points $x_1, \dots, x_n$ tels que :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \in [a_{i-1}, a_i].$$

La subdivision pointée sera notée :

$$D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}.$$

Les réels $h_i = a_i - a_{i-1}$ (amplitudes des intervalles) sont les pas de la subdivision pointée.

2. Soit D une subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle somme de Riemann associée à f sur D , le réel :

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i.$$

La somme de Riemann $S_D(f)$ est l'aire algébrique de la réunion des rectangles de largeur h_i et de hauteur $f(x_i)$ (figure 2). Il s'agit bien d'une aire algébrique (c'est-à-dire pouvant être comptée positivement ou négativement, par opposition à une aire absolue), puisque $f(x_i)h_i$ est compté positivement si $f(x_i) > 0$ et négativement si $f(x_i) < 0$.

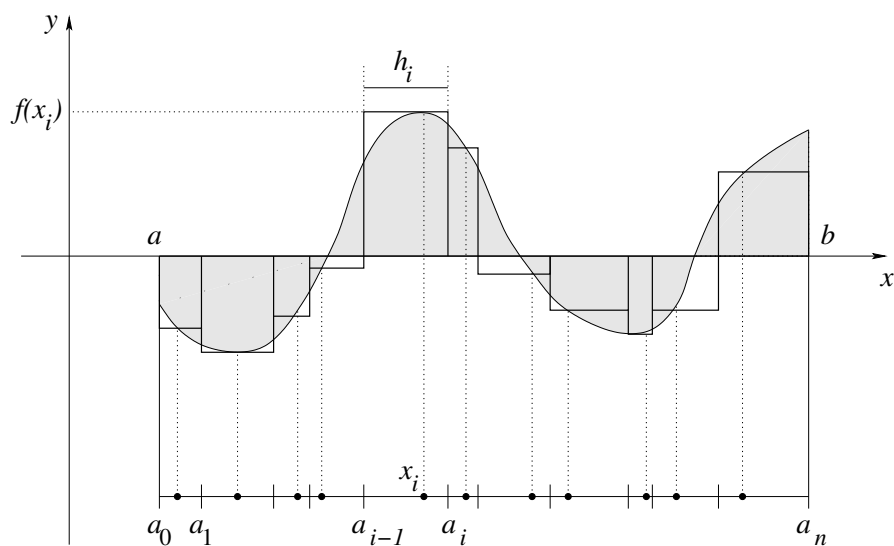


FIGURE 2 – Somme de Riemann associée à f sur D .

Intuitivement, l'aire A cherchée est la limite de $S_D(f)$ quand les pas h_i tendent vers 0. Un choix possible consiste à subdiviser en sous-intervalles égaux :

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad a_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

Dans ce cas,

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h_i = \frac{b-a}{n}.$$

Comme premier exemple, considérons la fonction identité $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, posons :

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{n}, \dots, a_i = \frac{i}{n}, \dots, a_n = 1.$$

Les pas de cette subdivision sont tous égaux à $1/n$. Voici trois calculs de sommes de Riemann, selon que l'on place les points x_i au début, au milieu ou à la fin des intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ (on rappelle que la somme des entiers de 1 à n vaut $n(n+1)/2$).

$$\begin{aligned} x_i = a_{i-1} : \quad S_D(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{n-1}{2n}, \\ x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} : \quad S_D(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2n} \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2}, \\ x_i = a_i : \quad S_D(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

La seconde somme est égale à $1/2$ pour tout n , les deux autres tendent vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. Par ailleurs, l'aire du triangle sous le graphe de la fonction est bien $1/2$ (figure 3).

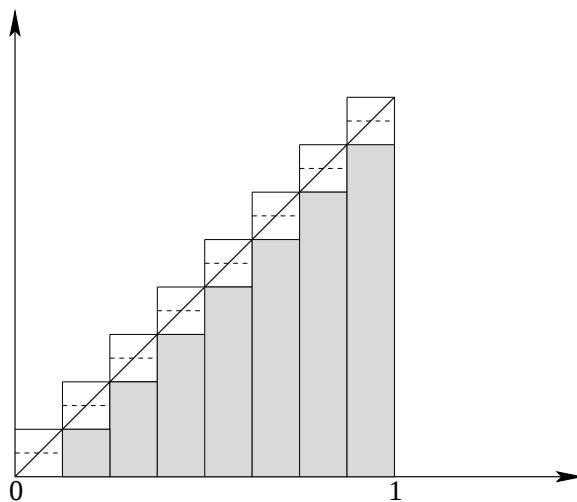


FIGURE 3 – Sommes de Riemann associées à l'identité sur $[0, 1]$.

Les trois propriétés des sommes de Riemann énoncées dans la proposition suivante sont très faciles à vérifier à partir de la définition 1. Nous les retrouverons comme propriétés des intégrales.

Proposition 1. *Soit D une subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$. Soient f et g deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. Linéarité : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g) .$$

2. Monotonie : Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$S_D(f) \leq S_D(g) .$$

3. Relation de Chasles : Soient $c > b$ un réel et E une subdivision pointée de $[b, c]$. Soit f une fonction définie sur $[a, c]$. Alors $D \cup E$ est une subdivision pointée de $[a, c]$ et :

$$S_D(f) + S_E(f) = S_{D \cup E}(f) .$$

1.2 L'intégrale d'une fonction

La figure 2 montre qu'une bonne approximation de l'aire associée à f demande que les intervalles de la subdivision pointée D soient petits. On mesure cela en parlant de la *finesse* de D .

Définition 2. Soient $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}$ une subdivision pointée de $[a, b]$ et $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ un nombre réel strictement positif. La subdivision pointée D est δ -fine si les pas de D sont bornés par δ , c'est-à-dire :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h_i = a_i - a_{i-1} \leq \delta .$$

Remarquons que si $\delta_* \leq \delta$, alors toute subdivision δ_* -fine est aussi δ -fine.

Définition 3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Riemann) s'il existe un réel A , représentant l'aire algébrique située sous le graphe de f , tel que pour toute marge d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée a priori, on peut trouver un nombre $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour toute subdivision pointée D de $[a, b]$, δ -fine, on ait :

$$|S_D(f) - A| \leq \varepsilon .$$

On dit alors que δ est ε -adapté à f .

2. Si f est intégrable sur $[a, b]$, le nombre réel A du point précédent est appelé intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a, b]$ et noté $A = \int_a^b f(x) dx$. On écrit aussi :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_D S_D(f) = \lim_D \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) .$$

et on dit que $\int_a^b f(x) dx$ est la limite des sommes de Riemann, lorsque la subdivision D devient de plus en plus fine.

Si δ est ε -adapté, alors tout $\delta_* \leq \delta$ est encore ε -adapté. Nous utiliserons cette observation à plusieurs reprises dans la section suivante. La notation dx intervient pour rappeler qu'à la limite on considère des rectangles « infiniment fins » de largeur dx , considérée comme accroissement infiniment petit de la variable x (figure 4). Le symbole $\int_a^b$ se lit « somme de a à b ».

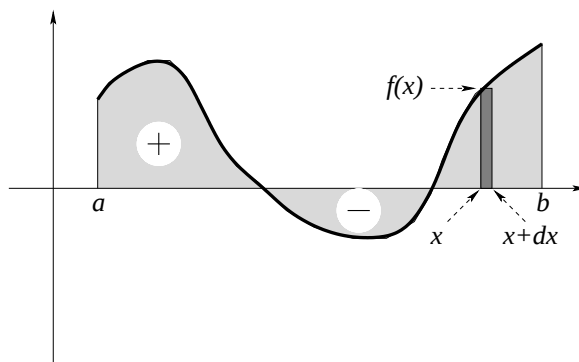


FIGURE 4 – Intégrale de f sur $[a, b]$.

Si la fonction f est constante sur $[a, b]$, alors pour toute subdivision pointée D , la valeur de $S_D(f)$ est constante.

$$\left(\forall x \in [a, b], f(x) = k \right) \implies S_D(f) = k(b - a).$$

Dans ce cas, n'importe quel réel strictement positif est ε -adapté. Une fonction constante est donc intégrable, et son intégrale est bien l'aire du rectangle sous le graphe : la définition est cohérente avec l'intuition géométrique.

Reprenons l'exemple de la fonction identité $f : x \mapsto x$ sur $[0, 1]$ (figure 3). Considérons une subdivision pointée quelconque $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. La somme de Riemann associée à f sur D peut être encadrée de la façon suivante.

$$S_1 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \leq S_D(f) \leq \sum_{i=1}^n a_i(a_i - a_{i-1}) = S_2.$$

La demi-somme de S_1 et S_2 vaut :

$$\frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 - a_{i-1}^2 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$$

Leur demi-différence vaut :

$$\frac{1}{2}(S_2 - S_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})^2 \leq \frac{1}{2} \max\{h_i\} \sum_{i=1}^n h_i = \frac{1}{2} \max\{h_i\}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\delta = 2\varepsilon$. Si D est δ -fine, $\max h_i \leq \delta$. Le calcul ci-dessus montre qu'alors

$$\left| S_D(f) - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon .$$

Donc f est intégrable sur $[0, 1]$ et son intégrale est $1/2$.

Proposition 2. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et γ un réel tel que $\gamma \in [0, 1]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + (i-1+\gamma)\frac{b-a}{n}\right) .$$

Considérons par exemple la somme :

$$\frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1)1} \right) ,$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)} + \dots + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}} \right) .$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $x \rightarrow \sqrt{x(1-x)}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à : $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$. Or, le graphe de cette fonction est un demi-cercle de rayon $1/2$. La limite est donc égale à la surface du demi-cercle, qui est $\pi/8$.

Démonstration : Pour $n \geq 1$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux en posant

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad a_i = a + i \frac{b-a}{n} .$$

Dans ce cas,

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h_i = h = \frac{b-a}{n} .$$

Pour $0 \leq \gamma \leq 1$, posons

$$x_i = a + (i-1+\gamma)\frac{b-a}{n} = a_{i-1} + \gamma h .$$

Donc $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ et $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ est une subdivision pointée de $[a, b]$. Pour $\gamma = 0$, $x_i = a_{i-1}$; pour $\gamma = 1$, $x_i = a_i$; pour $\gamma = 1/2$, x_i est le milieu de l'intervalle : ce sont les trois cas les plus fréquemment rencontrés.

La somme de Riemann associée à f sur D est :

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = h \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + (i-1+\gamma)\frac{b-a}{n}\right) .$$

Si $\delta > 0$, la subdivision D est δ -fine dès que $(b - a)/n \leq \delta$, c'est-à-dire :

$$n \geq (b - a)/\delta .$$

Si δ est ε -adapté à f , alors pour $n \geq (b - a)/\delta$,

$$\left| S_D(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \varepsilon .$$

D'où le résultat. □

La proposition suivante montre une façon de modifier une fonction sans modifier la valeur de son intégrale.

Proposition 3. *Soit U un sous-ensemble fini de points de $[a, b]$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que :*

$$\begin{aligned} f(x) &\neq 0 & \text{si } x \in U \\ f(x) &= 0 & \text{si } x \notin U . \end{aligned}$$

Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est nulle.

L'exemple standard de fonction ne satisfaisant pas les hypothèses de cette proposition est la fonction indicatrice des rationnels :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} . \end{cases}$$

On peut démontrer que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann (voir exercice 4).

Démonstration : L'ensemble U est fini, par exemple $U = \{u_0, \dots, u_h\}$. Notons :

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sum_{k=0}^h |f(u_k)|} .$$

Alors, si $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision pointée δ -fine, la somme de Riemann $S_D(f)$ est bornée comme suit :

$$|S_D(f)| \leq \sum_{k=0}^h |f(u_k)| \delta = \varepsilon .$$

D'où le résultat. □

1.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Les propriétés énoncées dans cette section sont, dans l'ordre, la linéarité, la monotonie et la relation de Chasles. Elles sont obtenues à partir des propriétés analogues des sommes de Riemann (proposition 1).

Théorème 1 (Linéarité). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et λ et μ deux constantes réelles. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx .$$

Démonstration : Posons :

$$A = \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_a^b g(x) \, dx .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe deux réels δ_1 et δ_2 tels que, si D est δ_1 -fine alors,

$$|S_D(f) - A| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} ,$$

et si D est δ_2 -fine alors,

$$|S_D(g) - B| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} .$$

Posons :

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} .$$

Toute subdivision D qui est δ -fine est à la fois δ_1 -fine et δ_2 -fine. Donc :

$$\begin{aligned} |S_D(\lambda f + \mu g) - (\lambda A + \mu B)| &= |\lambda(S_D(f) - A) + \mu(S_D(g) - B)| \\ &\leq |\lambda| |S_D(f) - A| + |\mu| |S_D(g) - B| \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lambda f + \mu g$ est intégrable, et que son intégrale est $\lambda A + \mu B$. $\square$

Une conséquence de ce théorème et de la proposition 3 est que deux fonctions ont la même intégrale si elles ne diffèrent que sur un ensemble fini de points.

Corollaire 1. *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soit U un ensemble fini de points de $[a, b]$ et g une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in [a, b] \setminus U , \quad g(x) = f(x) .$$

Alors g est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Démonstration : La fonction $g - f$ est non nulle sur un ensemble fini de points de $[a, b]$. Par application de la proposition 3, elle est intégrable et son intégrale est nulle. Donc $g = f + (g - f)$ est intégrable par le théorème 1 et son intégrale est :

$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + 0 .$$

□

Théorème 2 (Monotonie). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :*

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx .$$

Démonstration : Pour toute subdivision pointée D de l'intervalle $[a, b]$, $S_D(f) \leq S_D(g)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient δ_1 un réel ε -adapté à f et δ_2 un réel ε -adapté à g . Le réel $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ est ε -adapté à la fois à f et à g . Soit D une subdivision δ -fine. Posons :

$$A = \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_a^b g(x) \, dx .$$

Alors $A \leq S_D(f) + \varepsilon$ et $S_D(g) \leq B + \varepsilon$. Comme $S_D(f) \leq S_D(g)$, on obtient :

$$A \leq S_D(f) + \varepsilon \leq S_D(g) + \varepsilon \leq (B + \varepsilon) + \varepsilon .$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $A \leq B + 2\varepsilon$, ce qui entraîne $A \leq B$. □

Par exemple, si une fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration, son intégrale doit être positive ou nulle. Aussi, si f et $|f|$ sont intégrables, puisque $-|f| \leq f \leq |f|$, on en déduit :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx .$$

Théorème 3 (Relation de Chasles). *Soient a, b, c trois réels tels que $a < b < c$. Soit f une fonction de $[a, c]$ dans $\mathbb{R}$. Si f est intégrable sur $[a, b]$ et intégrable sur $[b, c]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et :*

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx .$$

Démonstration : D'après le corollaire 1, modifier f en un point ne change rien : nous supposons donc pour simplifier que $f(b) = 0$. Définissons les deux fonctions f_1 et f_2 , de $[a, c]$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ 0 & \text{si } x \in [b, c] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases} .$$

La somme $f_1 + f_2$ est égale à f . D'après le théorème 1 il suffit de démontrer que f_1 et f_2 sont intégrables sur $[a, c]$, avec :

$$\int_a^c f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^c f_2(x) dx = \int_b^c f(x) dx .$$

Nous donnons la démonstration pour f_1 , elle s'adapte facilement pour f_2 . Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ un réel $(\varepsilon/3)$ -adaptée pour f sur $[a, b]$. Soit $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}$ une subdivision δ -fine de $[a, c]$. Le point b n'est pas nécessairement un des points de subdivision. Soit k l'indice tel que $b \in [a_{k-1}, a_k[$. Selon que le point x_k est inférieur ou supérieur à b , la contribution de l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ à la somme de Riemann $S_D(f_1)$ sera $f(x_k)h_k$, ou bien 0. Considérons la subdivision D_1 de $[a, b]$, déduite de D en remplaçant a_k et x_k par b , et en supprimant les intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i > k$. Puisque D_1 est δ -fine, on a :

$$\left| S_{D_1}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Pour conclure, nous devons montrer que

$$\left| S_D(f_1) - S_{D_1}(f) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} .$$

La différence de ces deux sommes de Riemann est :

$$\begin{aligned} S_D(f_1) - S_{D_1}(f) &= 0 && \text{si } x_k \geq b \\ S_D(f_1) - S_{D_1}(f) &= f(x_k)(a_{k+1} - a_k) && \text{si } x_k < b . \end{aligned}$$

Supposons $x_k < b$. Par définition de δ , $h_k = a_k - a_{k-1} \leq \delta$ donc il existe une subdivision δ -fine de $[a, b]$ dont le dernier intervalle est de longueur h_k et contient x_k et b . Selon que l'on pointe ce dernier intervalle en x_k ou en b , on obtient deux sommes de Riemann dont la différence est précisément $f(x_k)h_k$. Comme δ est $(\varepsilon/3)$ -adaptée pour f sur $[a, b]$, on en déduit :

$$|f(x_k)h_k| \leq \frac{2\varepsilon}{3} .$$

D'où le résultat. □

Pour des réels a, b qui ne vérifient pas nécessairement $a < b$, on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{si } a = b, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{si } a > b .$$

On peut vérifier que la relation de Chasles reste valable dans tous les cas, quel que soit l'ordre des réels a, b et c , à condition bien sûr que f soit intégrable sur chacun des intervalles mis en jeu.

Comme application de la relation de Chasles, nous allons démontrer l'intégrabilité des fonctions en escalier.

Définition 4. On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ une fonction f telle qu'il existe une subdivision de $[a, b]$,

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_p = b ,$$

et des constantes réelles c_i , telles que pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$\forall x \in]u_{i-1}, u_i[, \quad f(x) = c_i ,$$

les valeurs $f(u_i)$ étant quelconques, éventuellement différentes des valeurs c_i .

Proposition 4. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, telle que

$$\forall x \in]u_{i-1}, u_i[, \quad f(x) = c_i ,$$

pour une subdivision $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_p = b$ de $[a, b]$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale vaut :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^p c_i (u_i - u_{i-1}) .$$

Démonstration : L'intégrale de la fonction constante qui vaut c_i sur $[u_{i-1}, u_i]$, est la surface du rectangle. Sur l'intervalle $[u_{i-1}, u_i]$, la fonction f diffère de la fonction constante au plus en deux points (les deux extrémités). D'après le corollaire 1, f est donc intégrable sur $[u_{i-1}, u_i]$, et son intégrale est $c_i(u_i - u_{i-1})$. Par la relation de Chasles, f est donc intégrable sur la réunion des intervalles $[u_{i-1}, u_i]$, et son intégrale est la somme des intégrales sur chacun des intervalles (cf. figure 5). $\square$

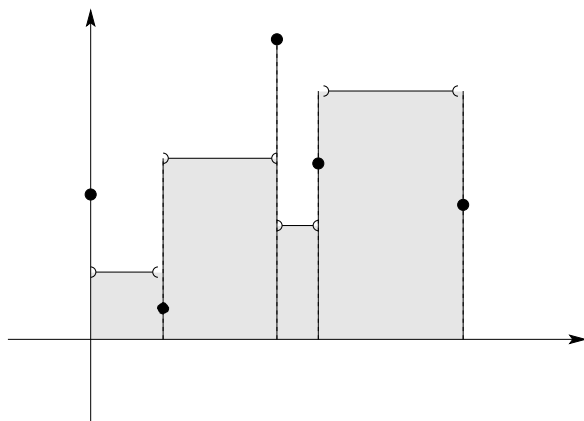


FIGURE 5 – Fonction en escalier.

1.4 Le théorème fondamental de l'Analyse

On appelle théorème fondamental de l'Analyse, le fait que l'intégration (c'est-à-dire le calcul d'aires) et la dérivation (c'est-à-dire le calcul de tangentes) sont des opérations inverses l'une de l'autre. Avant d'énoncer ce théorème, nous allons voir un moyen très simple de comprendre le rapport entre intégration et dérivation, via les sommes de Riemann. Rappelons que d'après le théorème des accroissements finis, sur tout intervalle où une fonction est dérivable, il existe un point où la valeur de la dérivée est égale au taux d'accroissement global de la fonction sur cet intervalle. La proposition suivante s'en déduit immédiatement.

Proposition 5. *Soit F une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On note f sa dérivée. Considérons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$:*

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b .$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe $x_i \in]a_{i-1}, a_i[$, tel que :

$$F(a_i) - F(a_{i-1}) = f(x_i)(a_i - a_{i-1}) .$$

Si D désigne la subdivision pointée $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}$, alors

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = F(b) - F(a) .$$

Démonstration : L'existence de x_i est assurée par le théorème des accroissements finis, appliqué à F sur l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$. Il suffit ensuite d'écrire :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(a_i) - F(a_{i-1}) = F(b) - F(a) .$$

□

Théorème 4. *Soit F une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On note f sa dérivée. Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) .$$

On note aussi :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) .$$

Démonstration : D'après la proposition 5, il existe des subdivisions pointées $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}$ aussi fines que l'on veut, telles que $S_D(f) = F(b) - F(a)$. Comme on a supposé que f était intégrable, la valeur de son intégrale est $F(b) - F(a)$. □

On en déduit facilement le résultat suivant, qui se démontre aussi au moyen du théorème des accroissements finis.

Corollaire 2. Soit F une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que $F' = 0$ (respectivement : $F' \geq 0$, $F' \leq 0$). Alors F est constante (respectivement : croissante, décroissante).

Démonstration : En effet, pour tous points a et b dans I tels que $a < b$,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) \, dx .$$

Donc par le théorème de monotonie 2 :

$$\begin{aligned} (\forall x, F'(x) = 0) &\implies F(b) - F(a) = 0 \\ (\forall x, F'(x) \geq 0) &\implies F(b) - F(a) \geq 0 \\ (\forall x, F'(x) \leq 0) &\implies F(b) - F(a) \leq 0 . \end{aligned}$$

□

1.5 Calcul à l'aide de primitives

Définition 5. Si f est une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur $]a, b[$, telle que $F' = f$.

Proposition 6. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, intégrable et admettant une primitive.

1. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1 - F_2$ est constante.
2. Si F est une primitive quelconque de f , alors

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) \, dt .$$

Démonstration : Le premier point est une conséquence directe du corollaire 2 : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors la fonction $F_1 - F_2$ a une dérivée nulle, donc elle est constante. Le second point est l'application du théorème 4 à l'intervalle $[a, x]$. □

Pour calculer une intégrale, on cherche la plupart du temps à déterminer une primitive de la fonction à intégrer. On utilise pour cela un catalogue de primitives connues, que l'on transforme en utilisant la linéarité, la relation de Chasles, ainsi que les deux théorèmes qui suivent.

Théorème 5 (Intégration par parties). Soient u et $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et dont les dérivées u' et v' sont continues. Alors uv' et $u'v$ sont intégrables et :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx .$$

Démonstration : Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ sont continues. D'après le théorème 8, ces fonctions sont donc intégrables, et :

$$\left[u(x)v(x) \right]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx .$$

D'où le résultat. $\square$

Théorème 6 (Changement de variable). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive. Soit φ une fonction de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, dérivable sur $] \alpha, \beta[$, telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors,*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt .$$

Démonstration : Par hypothèse, f admet une primitive F . D'après la proposition 6,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Par ailleurs, F et φ sont dérivables donc $F \circ \varphi$ l'est aussi et :

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \left[F \circ \varphi(t) \right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t) \, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

$\square$

En pratique, on effectue les substitutions :

$$x = \varphi(t) , \quad dx = \varphi'(t) \, dt , \quad a = \varphi(\alpha) , \quad b = \varphi(\beta) ,$$

en prenant soin de changer les bornes comme indiqué.

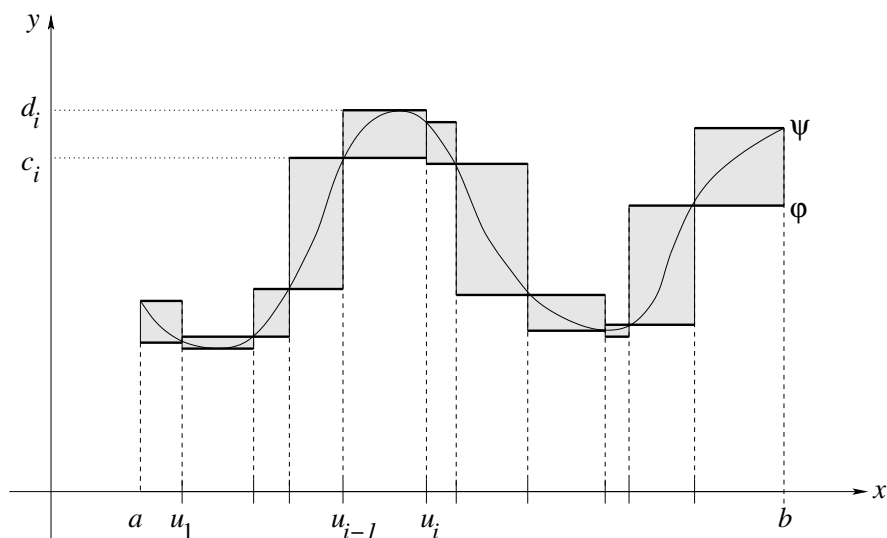
1.6 Encadrements par des fonctions en escalier

Dans cette section, nous étudions le cas des fonctions monotones et des fonctions continues. Soit f une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. L'idée est de considérer des encadrements de f par des fonctions en escalier φ et ψ , comme sur la figure 6.

$$\forall x \in [a, b] , \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) .$$

On peut supposer que les fonctions en escalier φ et ψ sont exprimées au moyen de la même subdivision $a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b$: sinon il est toujours possible de redécouper les subdivisions qui les définissent, pour arriver à une subdivision commune (comme les valeurs $\varphi(u_i)$, $\psi(u_i)$ ne jouent pas de rôle dans les intégrales, on choisira par exemple $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$). On aura donc :

$$\forall x \in]u_{i-1}, u_i[, \quad \varphi(x) = c_i \leq f(x) \leq \psi(x) = d_i .$$

FIGURE 6 – Encadrement d'une fonction f par des fonctions en escalier.

Dans cette situation, l'erreur due à l'encadrement de l'aire est précisément :

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} (d_i - c_i)(u_i - u_{i-1}) .$$

C'est l'aire des rectangles grisés sur la figure 6.

Nous commençons par un critère d'intégrabilité, qui sera ensuite appliqué aux fonctions monotones, puis aux fonctions continues.

Lemme 1. *Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est bornée.*

Démonstration : Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Il existe des réels A et δ tels que $|S_D(f) - A| \leq 1$ pour toute subdivision D δ -fine. En remplaçant éventuellement δ par une valeur plus petite, on peut supposer que $\delta = (b - a)/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ la subdivision pointée définie par $a_i = x_i = a + i\delta$. Donc D est δ -fine (et régulière).

Soit x un point quelconque de $[a, b]$. Il existe un indice i tel que $x \in [a_{i-1}, a_i]$. Soit $D(x)$ la subdivision pointée obtenue à partir de D en remplaçant x_i par x et en ne changeant rien d'autre. Comme $D(x)$ et D sont toutes deux δ -fines,

$$|S_{D(x)} - S_D| \leq |S_{D(x)} - A| + |S_D - A| \leq 2.$$

Or, $S_{D(x)} - S_D = (a_i - a_{i-1})(f(x) - f(x_i))$. On en déduit :

$$|f(x) - f(x_i)| \leq 2/(a_i - a_{i-1}) = 2/\delta.$$

Finalement, on obtient la borne uniforme suivante : pour tout x dans $[a, b]$,

$$|f(x)| \leq M + 2/\delta, \quad M = \max\{|f(a + i\delta)|; 0 \leq i \leq n\}.$$

□

Définition 6. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier ψ telles que $f \leq \psi$, et $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier φ telles que $\varphi \leq f$.

Proposition 7. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que :

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx; \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx; \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

Démonstration : Notons $E_-(f)$ (respectivement : $E_+(f)$) l'ensemble des intégrales des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ (respectivement : $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$). Si $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$, alors $\varphi \leq \psi$, donc :

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx.$$

Par conséquent, tout élément I_- de $E_-(f)$ et tout élément I_+ de $E_+(f)$ sont tels que $I_- \leq I_+$.

La condition de la proposition assure que $E_-(f)$ et $E_+(f)$ ne sont pas vides et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de $E_-(f)$ et un élément de $E_+(f)$ dont la différence est au plus ε . Ceci entraîne que la borne supérieure de $E_-(f)$ et la borne inférieure de $E_+(f)$ sont égales : notons A leur valeur commune.

Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons deux fonctions en escalier $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que :

$$\int_a^b \varphi(x) dx \geq A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi(x) dx \leq A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toutes les fonctions en escalier sont intégrables donc il existe des réels δ_1 et δ_2 qui sont $(\varepsilon/2)$ -adaptés pour φ et ψ respectivement. Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Soit D une subdivision δ -fine de $[a, b]$. Comme D est à la fois δ_1 -fine et δ_2 -fine,

$$\left| S_D(\varphi) - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| S_D(\psi) - \int_a^b \psi(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous allons vérifier que :

$$|S_D(f) - A| \leq \varepsilon.$$

Écrivons :

$$S_D(f) \leq S_D(\psi) \leq \left| S_D(\psi) - \int_a^b \psi(x) dx \right| + \int_a^b \psi(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + A + \frac{\varepsilon}{2} = A + \varepsilon .$$

Dans l'autre sens :

$$S_D(f) \geq S_D(\varphi) \geq \int_a^b \varphi(x) dx - \left| S_D(\varphi) - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \geq A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = A - \varepsilon .$$

On a montré que f est intégrable et que son intégrale vaut A .

Dans l'autre sens, supposons que f est intégrable. Notons A son intégrale. Fixons deux réels $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Il existe un réel δ tel que toute subdivision pointée $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ δ -fine vérifie :

$$|S_D(f) - A| \leq \varepsilon/4.$$

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, notons :

$$m_i = \inf\{f(x) ; a_{i-1} \leq x \leq a_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) ; a_{i-1} \leq x \leq a_i\}.$$

Il existe $x_i^+ \in [a_{i-1}, a_i]$ et $x_i^- \in [a_{i-1}, a_i]$ tels que :

$$f(x_i^-) \leq m_i + \eta, \quad f(x_i^+) \geq M_i - \eta.$$

Notons $D^+ = \{([a_{i-1}, a_i], x_i^+)\}_{1 \leq i \leq n}$ et $D^- = \{([a_{i-1}, a_i], x_i^-)\}_{1 \leq i \leq n}$. Les subdivisions pointées D^- et D^+ sont δ -fines donc

$$|S_{D^+}(f) - S_{D^-}(f)| \leq |S_{D^+}(f) - A| + |S_{D^-}(f) - A| \leq (\varepsilon/4) + (\varepsilon/4) = (\varepsilon/2).$$

En particulier,

$$S_{D^+}(f) \leq S_{D^-}(f) + (\varepsilon/2).$$

Notons φ une fonction en escalier telle que $\varphi(x) = m_i$ sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ et $\varphi(a_i) \leq f(a_i)$, et ψ une fonction en escalier telle que $\psi(x) = M_i$ sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ et $\psi(a_i) \geq f(a_i)$.

Par construction, $\varphi \leq f \leq \psi$ donc $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. De plus,

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) m_i \geq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) (f(x_i^-) - \eta) = S_{D^-}(f) - (b - a)\eta ,$$

et

$$\int_a^b \psi(x) dx = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) M_i \leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) (f(x_i^+) + \eta) = S_{D^+}(f) + (b - a)\eta .$$

En reportant dans ces inégalités notre estimation de l'écart entre $S_{D^-}(f)$ et $S_{D^+}(f)$, on voit que :

$$\int_a^b \psi(x) dx \leq (\varepsilon/2) + 2(b - a)\eta + \int_a^b \varphi(x) dx .$$

Si on choisit $\eta \leq \varepsilon/(4(b - a))$, on obtient la condition de l'énoncé. $\square$

Théorème 7. *Toute fonction monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration : Soit f une fonction monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que f est croissante. Si f est constante, le résultat est déjà démontré. Sinon, $f(b) - f(a) > 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\delta = \varepsilon / (f(b) - f(a))$. Soit $a = u_1 < \dots < u_p = b$ une subdivision δ -fine de $[a, b]$. Définissons les fonctions en escalier φ et ψ , pour tout $i = 1, \dots, p$ et pour tout $x \in]u_{i-1}, u_i[$ par :

$$\varphi(x) = f(u_{i-1}) \quad \text{et} \quad \psi(x) = f(u_i) ,$$

et $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$ comme déjà convenu. Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx &= \sum_{i=1}^p (f(u_i) - f(u_{i-1}))(u_i - u_{i-1}) \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^p (f(u_i) - f(u_{i-1})) \\ &= \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon . \end{aligned}$$

L'hypothèse de la proposition 7 est donc vérifiée. □

Théorème 8. *Toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration : Nous admettrons que toute fonction continue sur $[a, b]$ est en fait uniformément continue. Ce résultat est démontré dans les compléments du chapitre *Limites et continuité*. (Le lecteur intéressé pourra tout d'abord essayer de se convaincre de la différence entre la définition de la continuité, supposée connue, et celle de l'uniforme continuité, rappelée ci-dessous.)

Fixons $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de f signifie qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous x et y dans l'intervalle $[a, b]$:

$$|y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Choisissons une subdivision pointée δ -fine $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Pour tous x et y dans l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, $|y - x| \leq a_i - a_{i-1} \leq \delta$, donc :

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Comme f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, elle y atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure. Notons :

$$m_i = \inf \{ f(x) , x \in [a_{i-1}, a_i] \} \quad \text{et} \quad M_i = \sup \{ f(x) , x \in [a_{i-1}, a_i] \} .$$

Ce qui précède montre que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$|M_i - m_i| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Définissons maintenant, pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$,

$$\varphi(x) = m_i \quad \text{et} \quad \psi(x) = M_i,$$

et comme d'habitude $\varphi(a_{i-1}) = \psi(a_{i-1}) = f(a_{i-1})$. Les fonctions φ et ψ encadrent f et :

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(a_i - a_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

L'hypothèse de la proposition 7 est donc vérifiée. $\square$

Théorème 9. *Toute fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ admet une primitive F , définie pour tout $x \in [a, b]$ par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Les autres primitives sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.

Démonstration : Nous savons que l'intégrale définissant $F(x)$ existe pour tout $x \in [a, b]$, par le théorème 8. Nous allons démontrer que la fonction F est dérivable sur $]a, b[$, de dérivée f . Ceci entraîne le résultat, par le théorème 4 et la proposition 6.

Soient x un point de $]a, b[$ et h un réel tel que $x + h \in]a, b[$. La relation de Chasles donne

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x , il existe δ tel que pour $|t - x| \leq \delta$,

$$f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Par le théorème 2, pour $|h| \leq \delta$,

$$h(f(x) - \varepsilon) \leq \int_x^{x+h} f(t) \, dt \leq h(f(x) + \varepsilon).$$

En divisant par h , on obtient :

$$\left| \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat. $\square$

Nous avons déjà vu que l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle. Si de plus la fonction est *continue* et non identiquement nulle, son intégrale est strictement positive ; on utilise souvent ce résultat sous la forme suivante.

Proposition 8. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si l'intégrale de $|f|$ sur $[a, b]$ est nulle, alors f est identiquement nulle.*

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0 \implies \left(\forall x \in [a, b], f(x) = 0 \right).$$

Démonstration : Nous allons démontrer la contraposée : si $|f|$ n'est pas identiquement nulle, alors son intégrale est strictement positive. Soit x un point de $[a, b]$ tel que $|f(x)| > 0$. Puisque f est continue en x , $|f|$ l'est aussi, et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [x - \alpha, x + \alpha]$, $|f(t)| > |f(x)|/2$. Donc :

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \geq \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} |f(t)| \, dt \geq 2\alpha \frac{|f(x)|}{2} > 0.$$

$\square$

Toujours en utilisant la monotonie, la valeur de l'intégrale peut être encadrée à l'aide du minimum et du maximum de f sur l'intervalle $[a, b]$. Notons :

$$m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Alors,

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b - a)M.$$

Si on divise ces inégalités par la longueur de l'intervalle, on obtient :

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Il faut comprendre $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$ comme la *valeur moyenne* de la fonction sur l'intervalle. Le *théorème de la moyenne* dit que cette valeur moyenne est atteinte sur l'intervalle.

Théorème 10. *Si f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx = f(c).$$

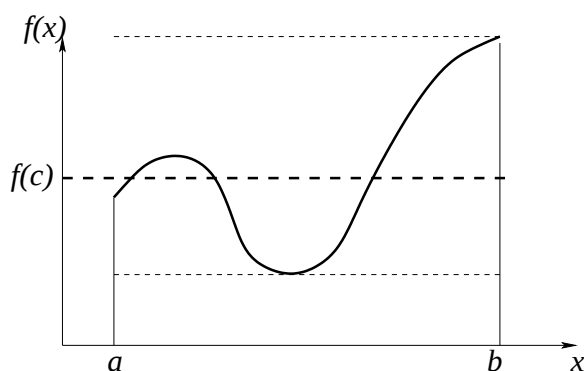


FIGURE 7 – Illustration du théorème de la moyenne.

Géométriquement, $f(c)$ est la hauteur du rectangle au-dessus de $[a, b]$, dont la surface est égale à l'intégrale de f sur $[a, b]$ (figure 7).

Démonstration : Soit F une primitive de f (théorème 9) : F est dérivable et a pour dérivée f . De plus :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

Le théorème des accroissements finis dit que le taux d'accroissement de F sur $[a, b]$ est égal à la valeur de la dérivée en un point c de $]a, b[$. D'où le résultat. $\square$

Les théorèmes 7 et 8 s'étendent sans difficulté aux cas des fonctions monotones par morceaux et des fonctions continues par morceaux.

Définition 7. On dit qu'une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est monotone (respectivement : continue) par morceaux s'il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

telle que f soit monotone (respectivement : continue) sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, et si elle admet une limite à gauche finie aux points $a_1, \dots, a_n$ et une limite à droite finie aux points $a_0, \dots, a_{n-1}$.

Proposition 9. Toute fonction monotone par morceaux est intégrable sur $[a, b]$. Toute fonction continue par morceaux est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration : L'hypothèse affirme que sur chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i]$, la fonction considérée diffère d'une fonction monotone (respectivement : continue) au plus aux extrémités de l'intervalle. Elle est donc intégrable sur $[a_{i-1}, a_i]$, d'après le corollaire 1. D'où le résultat, par la relation de Chasles. $\square$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0, 2]$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\square \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
2. $\boxtimes \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
3. $\square \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
4. $\boxtimes \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
5. $\square \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini.
6. $\boxtimes \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ tend vers 2 quand n tend vers l'infini.

Vrai-Faux 2. Toutes les fonctions considérées sont supposées intégrables sur l'intervalle considéré. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\boxtimes$ L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction négative ou nulle est négative ou nulle.
2. $\square$ L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction paire est positive ou nulle.
3. $\boxtimes$ L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction impaire est nulle.
4. $\square$ L'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction minorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
5. $\square$ L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
6. $\boxtimes$ L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par 2 est inférieure ou égale à 4.
7. $\boxtimes$ Si une fonction f est telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) < x^3$, alors son intégrale sur $[-1, 1]$ est strictement négative.
8. $\boxtimes$ Si l'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction f continue vaut y , alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = y$.
9. $\square$ Si l'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction f vaut y , alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 2y$.

Vrai-Faux 3. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\square$ Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.

2. ☒ Si une fonction est continue sur $[a, b]$, sauf en un point, alors f admet une primitive.
3. ☒ Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive qui s'annule en b .
4. ☐ Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ s'annule en un point de $[a, b]$.
5. ☒ Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$.
6. ☐ Toute primitive d'une fonction continue sur $]a, b[$ est dérivable à droite en a .

Vrai-Faux 4. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.
2. ☒ Toute primitive d'une fonction négative ou nulle est décroissante.
3. ☐ Toute fonction continue est la primitive d'une fonction continue.
4. ☐ Si f est une fonction continue, alors $-\cos(f(x))$ est une primitive de $\sin(f(x))$.
5. ☐ Si f est une fonction continûment dérivable et ne s'annulant pas, $\ln(f(x))$ est une primitive de $f'(x)/f(x)$.
6. ☒ Si f est une fonction continûment dérivable, $\arctan(f(x))$ est une primitive de $f'(x)/(1 + f^2(x))$.
7. ☐ Il existe des primitives de $(1 - x^2)^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[0, 2]$.
8. ☒ Il existe des primitives de $(1 - x^2/2)^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$.
9. ☒ Il existe des primitives de $|1 - x^2|^{1/2}$ définies sur l'intervalle $[-2, 2]$.
10. ☐ Il existe des primitives de $|1 - x^2|^{-1/2}$ définies sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Vrai-Faux 5. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = - \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \cos(x) \, dx$.
2. ☐ $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \int_0^\pi \cos(x) \, dx$.
3. ☒ $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \pi - \int_0^\pi \cos(x) \, dx$.
4. ☐ $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \pi - 2$.
5. ☒ $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \pi$.
6. ☒ $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx = -2$.
7. ☐ $\int_0^\pi x \sin(2x) \, dx = \left[\sin(2x) \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \cos(2x) \, dx$.
8. ☒ $\int_0^\pi x \cos(2x) \, dx = 0$.

$$9. \quad \boxtimes \int_0^\pi x \sin^2(x) \, dx = \int_0^\pi x \cos^2(x) \, dx .$$

$$10. \quad \square \int_0^\pi x \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi^2}{2} .$$

Vrai-Faux 6. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

$$1. \quad \square \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \frac{du}{2} .$$

$$2. \quad \square \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(u) \frac{du}{2} .$$

$$3. \quad \boxtimes \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \, du .$$

$$4. \quad \boxtimes \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(2x) \, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u}{2\sqrt{1-u^2}} \, du .$$

$$5. \quad \square \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{u})}{u^2} \, du .$$

$$6. \quad \boxtimes \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(u))}{2u} \, du .$$

2.2 Exercices

Exercice 1. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = \ln(2) .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{(n+i)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2in}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \, dx = \sqrt{3} - 1 .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2n} \frac{i}{i^2 + n^2} = \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(5) .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{n-i}{n^3 + n^2 i}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^{-2}$, sur l'intervalle $[1, 2]$. Soit $n \geq 1$. Soit D la subdivision régulière de $[1, 2]$ en n intervalles égaux, pointée en la borne de droite de chaque intervalle.

1. Démontrer que

$$S_D(f) = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^2} .$$

2. Démontrer que

$$n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} < S_D(f) < n \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i-1)(n+i)} .$$

3. En déduire que

$$\frac{1}{2} < S_D(f) < \frac{n(n-2)}{n(2n-1)} .$$

Indication : remarquer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} .$$

4. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_D(f) = \frac{1}{2} .$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère la fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la subdivision D_1 de $[a, b]$ en n intervalles égaux, pointée par la borne de gauche de chaque intervalle. Démontrer que

$$S_{D_1}(f) = \frac{(b-a)e^a}{n} \frac{e^{b-a} - 1}{e^{(b-a)/n} - 1} .$$

2. Soit D_2 la subdivision de $[a, b]$ en n intervalles égaux, pointée par la borne de droite de chaque intervalle. Démontrer que

$$S_{D_2}(f) = e^{(b-a)/n} S_{D_1}(f) .$$

3. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_1}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_2}(f) = e^b - e^a .$$

Exercice 4. Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} . \end{cases}$$

On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels. Soit n un entier strictement positif. Pour $i = 0, \dots, n$, on pose $a_i = i/n$.

1. Montrer que pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe x_i et y_i dans $[a_{i-1}, a_i]$ tels que $f(x_i) = 1$ et $f(y_i) = 0$.
2. On considère les deux subdivisions pointées

$$D_1 = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad D_2 = \{([a_{i-1}, a_i], y_i)\}_{1 \leq i \leq n} .$$

Montrer que $S_{D_1}(f) = 1$ et $S_{D_2}(f) = 0$.

3. En déduire que f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et n un entier. On note A_n l'intégrale suivante, si elle existe.

$$A_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx .$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$, dont la dérivée est continue et bornée sur $]a, b[$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n existe. En utilisant une intégration par parties, démontrer que A_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
2. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n existe. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que A_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
3. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n existe. En utilisant un encadrement par des fonctions en escalier, démontrer que A_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
4. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n existe. Démontrer que A_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 6. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) \sup\{ f(x), x \in [a, b] \} .$$

Démontrer que f est constante.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1/2 .$$

Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$, tel que $f(a) = a$.

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

1. Soit g une fonction en escalier de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction fg est intégrable sur $[0, 1]$.
2. On suppose que pour toute fonction en escalier g de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x)g(x) \, dx = 0 .$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 9. Soient a, b et c trois réels tels que $a \leq c < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n sur $[a, b]$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [c, c + 1/n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = f(c) .$$

2. Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = \lim_{x \rightarrow c+} f(x) .$$

Exercice 10. Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

- Démontrer que les fonctions f^2 , fg , g^2 sont intégrables sur $[a, b]$.
- Soit λ un réel quelconque. Démontrer que la fonction $(f + \lambda g)^2$ est intégrable sur $[a, b]$ et exprimer son intégrale en fonction des intégrales de f^2 , fg et g^2 .
- En observant que l'intégrale de $(f + \lambda g)^2$ est positive ou nulle pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) .$$

4. Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si f et g sont proportionnelles.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui à x associe x^2 . Soit $\gamma \in [0, 1]$ un réel. Pour tout $i = 0, \dots, 10$, on pose $a_i = i/10$. Pour $i = 1, \dots, 10$, on pose $x_i = a_{i-1} + \gamma/10$. On note D_γ la subdivision pointée $D_\gamma = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq 10}$ et S_γ la somme de Riemman associée à f sur D_γ .

☐ A $S_0 = \frac{1}{1000} \sum_{i=0}^9 i^2$.

☐ B $S_0 = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$.

☐ C $S_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^9 \frac{i^2}{100}$.

☐ D $S_{1/2} = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^9 \frac{(2i+1)^2}{10}$.

[E] S_γ est fonction croissante de γ .

Question 2. Soit f l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui à x associe x^2 . Soit n un entier. La somme S_n est une somme de Riemann associée à f sur $[-1, 1]$.

[A] $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=-n}^n \frac{i^2}{n^2}.$

[B] $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{(2i-1)^2}{n^2}.$

[C] $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^n \frac{i^2}{n^2}.$

[D] $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{n-1} \frac{i^2}{n^2}.$

[E] $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(2i-n)^2}{n^2}.$

Question 3. Soit f une fonction, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$. Soit S un ensemble fini de points de $[a, b]$.

[A] Si $f(x) = 0$ pour tout x dans S , alors $\int_a^b f(x) dx = 0$.

[B] Si $f(x) = 1$ pour tout x dans S , alors $\int_a^b f(x) dx = b - a$.

[C] Si $f(x) = x$ pour tout x dans $[a, b] \setminus S$, alors $\int_a^b f(x) dx = b - a$.

[D] Si $f(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b] \setminus S$, alors $\int_a^b f(x) dx = 0$.

[E] Si $f(x) = x$ pour tout x dans $[a, b] \setminus S$, alors $\int_a^b f(x) dx = (b^2 - a^2)/2$.

Question 4. La proposition est vraie pour toute fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, intégrable sur $[0, 1]$.

[A] $\int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx.$

[B] $\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2}.$

[C] $\int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 1 - f(x) dx.$

[D] $\int_0^1 1 - f(x) dx \leq \left| 1 - \int_0^1 f(x) dx \right|.$

[E] $\int_0^1 f^3(x) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx.$

Question 5. La proposition est vraie pour toute fonction f de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$, intégrable sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$.

[A] $\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_0^{-1} f(x) dx.$

☐ B $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_{-1}^0 f(x) \, dx.$

☐ C $\int_0^1 f(x) \, dx \leq \int_{-1}^1 f(x).$

☐ D $\int_{-1}^1 (1 - f(x)) \, dx = 1 - \int_{-1}^1 f(x) \, dx.$

☐ E $-2 \leq \int_{-1}^1 f(x) \, dx \leq 2.$

Question 6. Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, admettant une primitive. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note F_c la primitive de f telle que $F(0) = c$.

☐ A $\forall x \in [0, 1], \quad F_{-1}(x) \leq 0.$

☐ B $\forall c \in [0, 1], \quad F_c(x) \leq 1.$

☐ C $\forall c \in [0, 1], \quad \int_c^1 f(x) \, dx = F_c(1).$

☐ D $\forall c \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], \quad F_c(x) - F_{-c}(x) = 2c.$

☐ E $\forall c \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], \quad \int_0^c f(x) \, dx = F_c(0).$

Question 7.

☐ A $\int_0^\pi x \sin(x) \, dx = \int_0^\pi \cos(x) \, dx.$

☐ B $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx = - \int_0^\pi \sin(x) \, dx.$

☐ C $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) \, dx.$

☐ D $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) \, dx.$

☐ E $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx = \int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx.$

Question 8. La proposition est vraie pour toute fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, intégrable sur $[0, 1]$.

☐ A $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 f(x^2) \, dx.$

☐ B $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^\pi f(\sin(x)) \cos(x) \, dx.$

☐ C $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 f(1-x) \, dx.$

☐ D $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos(x)) \sin(x) \, dx.$

☐ E $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} f(2x) \, dx.$

Question 9. La proposition est vraie pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$.

☐ A $\exists c \in [-1, 1], \quad \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2f(c).$

☐ B $\exists c \in [-1, 1], \quad \int_0^1 f(x) \, dx = 2f(c).$

- ☐ C $\exists c \in [0, 1], \int_{-1}^1 f(x) dx = 2f(c).$
- ☐ D $\inf\{f(x), x \in [-1, 1]\} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \sup\{f(x), x \in [-1, 1]\}$
- ☐ E $\inf\{f(x), x \in [-1, 1]\} \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \sup\{f(x), x \in [-1, 1]\}$

Question 10. Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- ☐ A Si f n'est pas continue sur $[0, 1]$, alors f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.
- ☐ B Si f est décroissante sur $[0, 1]$, alors f est intégrable sur $[0, 1]$.
- ☐ C Si f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$, alors f n'est monotone sur aucun intervalle inclus dans $[0, 1]$.
- ☐ D Si f est continue sur $[0, 1]$, sauf en un nombre fini de points, alors f est intégrable sur $[0, 1]$.
- ☐ E Si f diffère d'une fonction croissante sur $[0, 1]$ en un nombre dénombrable de points, alors f est intégrable sur $[0, 1]$.

Réponses : 1-AE 2-DE 3-DE 4-AE 5-AE 6-AD 7-BC 8-CD 9-AD 10-BD

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et intégrable sur $[a, b]$. Soit $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

1. Qu'appelle-t-on *pas de la subdivision* D ?
2. Qu'appelle-t-on *somme de Riemann* associée à f sur D ?
3. Si f est constante sur $[a, b]$, que vaut la somme de Riemann associée à f sur D ?
4. Soit δ un réel strictement positif. Quand dit-on de la subdivision pointée D qu'elle est δ -fine ?
5. Soit ε un réel strictement positif. Quand dit-on que δ est ε -adapté à f ?

Exercice 1 : Soit n un entier strictement positif. On rappelle l'expression suivante pour la somme des carrés des n premiers entiers.

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 . On note D la subdivision pointée $D = \{([a_{i-1}, a_i], x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$.

1. Dans cette question, on pose $a_i = i/n$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et $x_i = a_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que :

$$S_D(f) = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

2. Dans cette question, on pose $a_i = i/n$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et $x_i = a_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que :

$$S_D(f) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

3. Soit γ un réel tel que $0 < \gamma < 1$. Dans cette question, on pose $a_i = i/n$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et $x_i = a_{i-1} + \gamma/n$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que $S_D(f)$ converge vers $1/3$ quand n tend vers l'infini.
4. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. On suppose désormais que $a_0 = a$ et $a_n = b$. On pose :

$$S_0 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}^2 (a_i - a_{i-1}) \quad \text{et} \quad S_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2 (a_i - a_{i-1}).$$

Montrer que $S_0 \leq S_D(f) \leq S_1$.

5. On pose :

$$S_{1/2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2} \right)^2 (a_i - a_{i-1}),$$

Montrer que :

$$\frac{S_0 + 4S_{1/2} + S_1}{6} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

6. On note h le pas maximal de la subdivision :

$$h = \max\{a_i - a_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Montrer que :

$$S_1 - S_0 \leq h(b^2 - a^2).$$

7. Montrer que $S_0 \leq (b^3 - a^3)/3 \leq S_1$. En déduire que :

$$\left| S_D - \frac{b^3 - a^3}{3} \right| \leq h(b^2 - a^2).$$

8. En déduire que f est intégrable sur $[a, b]$ et que :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

9. Soient a et b deux réels *quelconques*. Montrer que :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b^3 - a^3}{3} .$$

Exercice 2 : On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *paire* (respectivement : *impaire*) si pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ (respectivement : $f(-x) = -f(x)$).

1. Soit f une fonction impaire, admettant une primitive. Montrer que toute primitive de f est une fonction paire.
2. Soit f une fonction, admettant une primitive paire. Montrer que pour tous réels positifs a et b ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_{-a}^{-b} f(x) \, dx .$$

3. Soit f une fonction, admettant une primitive paire. Dédurre de la question précédente que f est impaire.
-

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx .$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^{n-2}(x) \, dx .$$

En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$I_{2k} = \pi \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} .$$

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Les pas de la subdivision D sont les amplitudes des intervalles $[a_{i-1}, a_i]$:

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h_i = a_i - a_{i-1} .$$

2. La somme de Riemann associée à f sur D est :

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i .$$

3. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = k$, alors :

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n k(a_i - a_{i-1}) = k \sum_{i=1}^n h_i = k(b - a) .$$

4. On dit que la subdivision D est δ -fine si :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad h_i = a_i - a_{i-1} \leq \delta .$$

5. On dit que δ est ε -adapté à f si pour toute subdivision D qui est δ -fine,

$$\left| S_D(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \varepsilon .$$

Exercice 1 :

1.

$$\begin{aligned} S_D(f) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S_D(f) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} . \end{aligned}$$

3. Par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, n$, $a_{i-1} < x_i < a_i$, donc $a_{i-1}^2 < x_i^2 < a_i^2$. La somme de Riemann $S_D(f)$ est encadrée par celles des deux questions précédentes.

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} < S_D(f) < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} .$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} .$$

D'où le résultat.

4. Par définition d'une subdivision pointée, pour tout $i = 1, \dots, n$, $a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$, donc $a_{i-1}^2 \leq x_i^2 \leq a_i^2$ (puisque par hypothèse $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$). Donc :

$$\sum_{i=1}^n a_{i-1}^2 (a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 (a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 (a_i - a_{i-1}) ,$$

soit $S_0 \leq S_D(f) \leq S_1$.

5.

$$\begin{aligned} \frac{S_0 + 4S_{1/2} + S_1}{6} &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (2a_{i-1}^2 + 2a_{i-1}a_i + 2a_i)(a_i - a_{i-1}) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i^3 - a_{i-1}^3 = \frac{b^3 - a^3}{3} . \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_{i-1}^2)(a_i - a_{i-1}) \\ &\leq h \sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_{i-1}^2) = h(b^2 - a^2) . \end{aligned}$$

7. La somme de Riemann $S_{1/2}$ est comprise entre S_0 et S_1 , donc :

$$\frac{6S_0}{6} \leq \frac{S_0 + 4S_{1/2} + S_1}{6} \leq \frac{6S_1}{6} \iff S_0 \leq \frac{b^3 - a^3}{3} \leq S_1 .$$

Les deux réels $S_D(f)$ et $(b^3 - a^3)/3$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[S_0, S_1]$, donc leur distance est majorée par la longueur de l'intervalle.

$$\left| S_D - \frac{b^3 - a^3}{3} \right| \leq S_1 - S_0 \leq h(b^2 - a^2) .$$

8. Soit ε un réel strictement positif. Notons δ la constante $\varepsilon/(b^2 - a^2)$. Soit D une subdivision δ -fine de $[a, b]$. Par hypothèse, cette subdivision vérifie :

$$h = \max\{a_i - a_{i-1}, i = 1, \dots, n\} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{b^2 - a^2} .$$

D'après la question précédente,

$$\left| S_D - \frac{b^3 - a^3}{3} \right| \leq h(b^2 - a^2) \leq \varepsilon .$$

Ceci montre que f est intégrable, et a pour intégrale $(b^3 - a^3)/3$.

9. Nous pouvons nous restreindre au cas $a < b$. En effet :

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx .$$

Les questions précédentes montrent le résultat pour $0 \leq a < b$. On en déduit le cas $a < b \leq 0$ par le changement de variable $t = -x$, et le fait que $f(-x) = f(x)$.

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_{-a}^{-b} f(-t) \, dt = \int_{-b}^{-a} f(t) \, dt = \frac{(-a)^3 - (-b)^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3} .$$

Pour $a < 0 < b$, on applique les deux cas précédents et la relation de Chasles.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^0 f(x) \, dx + \int_0^b f(x) \, dx = \frac{0 - a^3}{3} + \frac{b^3 - 0}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3} .$$

Exercice 2 :

1. Soit a un réel quelconque, et F une primitive de f . Écrivons :

$$F(a) - F(0) = \int_0^a f(x) \, dx .$$

Effectuons le changement de variable $t = -x$.

$$\int_0^a f(x) \, dx = - \int_0^{-a} f(-t) \, dt .$$

Or f est impaire, donc pour tout t , $f(-t) = -f(t)$. Donc :

$$F(a) - F(0) = \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^{-a} f(t) \, dt = F(-a) - F(0) .$$

Donc $F(a) = F(-a)$: F est paire.

2. Soit F une primitive paire de f .

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(-b) - F(-a) = \int_{-a}^{-b} f(x) \, dx .$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = \frac{1}{h} \int_{-a}^{-a-h} f(x) \, dx .$$

Puisque f admet une primitive F ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = F'(a) = f(a)$$

De même,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-a}^{-a-h} f(x) \, dx = -F'(a) = -f(a)$$

D'où le résultat.

Exercice 3 :

1.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\pi/2} = 1 .$$

2. Pour l'intégration par parties, on pose $u = \cos^{n-1}(x)$ et $v' = \cos(x)$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos^{n-1}(x) \, dx \\ &= \left[\sin(x) \cos^{n-1}(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) (-\sin(x))(n-1) \cos^{n-2}(x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^{n-2}(x) \, dx . \end{aligned}$$

Remplaçons $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$.

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \cos^{n-2}(x) \, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n .$$

Donc :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

3. Démonstration par récurrence sur k pour I_{2k} : la formule est vraie pour $k = 0$. Supposons-la vraie pour k . Alors :

$$I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2^2(k+1)^2} \pi \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} = \pi \frac{(2k+2)!}{2^{2k+3}((k+1)!)^2} .$$

La formule est vraie pour $k+1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$.Démonstration analogue pour I_{2k+1} . La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons-la vraie pour k . Alors :

$$I_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1} = \frac{2^2(k+1)^2}{(2k+3)(2k+2)} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k+2}((k+1)!)^2}{(2k+3)!} .$$

La formule est vraie pour $k+1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3 Compléments

3.1 Archimède et la quadrature de la parabole

Voici la traduction, par Charles Mugler, de la préface d'un texte d'Archimède (287–212 av. JC), à propos de l'aire d'un arc de parabole.

Archimède, à Dosithée, prospérité !

Quand j'ai appris que Conon, dont l'amitié ne m'avait jamais fait défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu es expert en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un esprit remarquable en mathématiques, et je pensai à t'envoyer par écrit, comme j'avais eu l'intention de le faire à Conon, un théorème de géométrie, qui n'avait pas été étudié auparavant, mais que j'ai étudié maintenant, en le démontrant par la géométrie après l'avoir découvert par la mécanique. Certains des géomètres anciens se sont efforcés de montrer par écrit qu'il est possible de trouver une aire rectiligne équivalente à l'aire d'un cercle donné, ou à celle d'un segment de cercle donné, après quoi ils ont essayé de carrer l'aire comprise entre une section de cône et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, et c'est là la raison pour laquelle la plupart ont jugé que ces propositions n'ont pas été inventées par eux. En ce qui concerne le segment compris entre une droite et une parabole, nous savons qu'aucun des géomètres anciens n'en a cherché la quadrature, que nous avons trouvée maintenant : *nous démontrons, en effet, que tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment*, en admettant pour la démonstration le lemme que voici : l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté un nombre suffisant de fois à lui même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme ; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que les cercles et les sphères ont entre eux le rapport des carrés sur leurs diamètres et que les sphères ont entre elles le rapport des cubes sur leurs diamètres, et ils ont démontré que toute pyramide est équivalente au tiers du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide, et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône, en prenant un lemme semblable à celui que nous venons d'indiquer. Il se trouve cependant que tous ces théorèmes cités sont considérés comme non moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme : il me suffit d'avoir amené au même degré de certitude ceux que je publie maintenant. Je t'envoie donc les démonstrations que j'ai rédigées pour le théorème, en montrant d'abord comment je l'ai examiné par la mécanique, ensuite aussi comment je l'ai prouvé par la géométrie. Je ferai précéder, de plus, mes démonstrations de propositions élémentaires

sur les coniques utiles pour la démonstration. Sois en bonne santé.
Voici en termes modernes le résultat démontré par Archimède (figure 8).

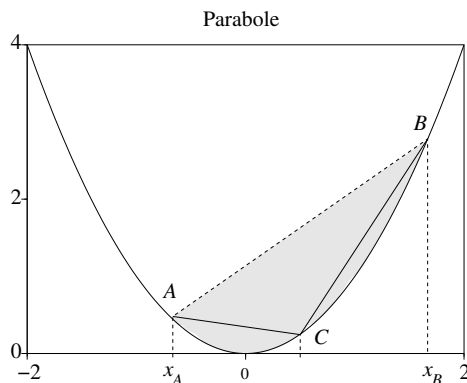


FIGURE 8 – Théorème d’Archimède : la surface d’un arc de parabole est égale aux quatre tiers de celle du triangle inscrit.

Proposition 10. *Considérons la courbe d’équation $y = x^2$. Soient A et B deux points de cette courbe. Soit C le point tel que la tangente en ce point soit parallèle à la droite passant par A et B . Alors la surface délimitée par la courbe et le segment $[A, B]$ est égale à la surface du triangle ABC , multipliée par $4/3$.*

Avec la possibilité de calculer l’aire contenue sous une courbe comme une intégrale, le problème est relativement facile. Nous laissons au lecteur les calculs qui montrent que si x_A est l’abscisse du point A et x_B l’abscisse du point B , alors le point C a pour abscisse $(x_A + x_B)/2$, la surface de l’arc de parabole est $(x_B - x_A)^3/6$ et celle du triangle ABC est $(x_B - x_A)^3/8$.

Mais Archimède ne connaissait pas les intégrales, pas même les fonctions. Remarquez qu’il n’exprime pas l’aire de l’arc de parabole comme un nombre, fonction de x_A et x_B , comme nous le faisons : son résultat énonce un rapport de surfaces. C’est aussi ainsi qu’il rappelle dans son introduction les résultats d’aires et de volumes connus avant lui.

Les arguments de mécanique auxquels Archimède fait référence sont des calculs de longueurs de leviers qu’il imagine pour équilibrer deux surfaces différentes (« donnez-moi un point d’appui et je soulèverai le monde »). Son découpage de la surface à calculer en surfaces approchées de plus en plus petites est assez remarquable. Il faudra attendre une dizaine de siècles avant qu’on fasse mieux.

Archimède a passé l’essentiel de sa vie à Syracuse, en Sicile. Aussi, quand au cours de la seconde guerre punique les Romains assiégèrent sa ville, il participa activement à la défense en inventant des machines de guerre capables de couler les navires adverses,

semant ainsi la terreur parmi les assiégeants. Cependant en 212 av JC, après plusieurs années de siège, les Romains réussirent à prendre Syracuse. Archimède mourut lors du pillage de la ville. Ce qui se passa exactement n'est pas certain. L'une des versions données par Plutarque, dit qu'un soldat Romain se présenta devant Archimède alors que celui-ci traçait des figures géométriques sur le sol, inconscient de la prise de la ville par l'ennemi. Troublé dans sa concentration par le soldat, Archimède lui aurait lancé « Ne dérange pas mes cercles ! ». Le soldat vexé l'aurait alors tué d'un coup d'épée. On fit graver sur sa tombe une sphère inscrite dans un cylindre, avec le rapport de $2/3$ entre les deux volumes, ce qu'Archimède considérait comme sa plus grande découverte.

3.2 La famille ibn Qurra

L'idée de calculer une aire ou un volume en les découpant en petits morceaux (méthode d'exhaustion) était présente, bien avant Archimède, chez les mathématiciens Grecs du 5^e siècle avant notre ère. Elle fut reprise et raffinée, tout au long du Moyen-âge par les mathématiciens arabes ; parmi eux, la famille des ibn Qurra.

Abul Hassan Thabit ibn Qurra ibn Marwan al-Sabi al-Harrani (836-901) était le père de Sinan ibn Thabit ibn Qurra (880-943), un médecin, lui-même père de Ibrahim ibn Sinan ibn Thabit ibn Qurra (908-946), mathématicien et astronome comme son grand-père.

Les calculs de surface de Thabit Ibn Qurra étaient basés sur un encadrement par des sommes de rectangles majorantes et minorantes. À l'occasion de la quadrature de la parabole, il fut le premier à avoir l'idée de diviser l'intervalle d'intégration en segments inégaux. Ce que son petit-fils Ibrahim dit dans son *Traité sur la quadrature de la parabole* donne une bonne idée de l'intérêt suscité par les problèmes de quadrature, et de la compétition entre les mathématiciens de ce temps.

J'ai composé un travail sur la mesure de la parabole, dans un traité séparé. Mon grand-père avait résolu la mesure de la parabole, mais un géomètre m'a appris que al-Mahani avait une solution de ce problème, qu'il m'a communiquée, et qui est plus facile que la solution de mon grand-père, et personne parmi nous n'avait une solution meilleure que celle-là. Mon grand-père avait résolu le problème en 20 propositions, et il utilisait de nombreux lemmes préliminaires parmi ces propositions, et il démontrait la quadrature de la parabole par la méthode de contradiction. Al-Mahani utilisait aussi des lemmes sur les nombres pour sa démonstration, et ensuite il prouvait le résultat par la méthode de contradiction en cinq ou six propositions, de manière longue. Alors je l'ai démontré en trois propositions géométriques, sans théorème préliminaire sur les nombres. J'ai démontré la mesure de la parabole elle-même par la méthode de la preuve directe, et je n'ai pas eu besoin de la méthode de contradiction.

La méthode d'Ibrahim était effectivement plus simple que celles de tous ses prédécesseurs, et elle ne sera surpassée qu'après la découverte du calcul intégral par Newton et

Leibniz au XVII^e siècle.

3.3 Calcul numérique des intégrales

Comment fait-on pour calculer numériquement une intégrale sur ordinateur ? Deux cas se présentent, selon que l'on ne connaît que certaines valeurs de la fonction (typiquement, par une table de données expérimentales), ou bien que l'on peut l'évaluer en n'importe quel point. Comme nous allons le voir, la deuxième situation est beaucoup plus favorable.

Supposons que l'on dispose de $n + 1$ abscisses $x_0, \dots, x_n$ et de $n + 1$ ordonnées $y_0, \dots, y_n$. L'idée la plus naïve est de calculer la somme des aires de rectangles basés sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, et de hauteur y_i ou bien y_{i+1} : ce sont les *méthodes des rectangles*, à gauche, ou à droite.

$$R_g = \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \quad \text{et} \quad R_d = \sum_{i=1}^n y_i(x_i - x_{i-1}) .$$

Si on ne sait absolument rien de la fonction à intégrer, il n'y a pas de raison d'aller plus loin. Mais si on imagine un modèle dans lequel les ordonnées y_i sont les évaluations en x_i d'une fonction continue f , alors on obtient une meilleure précision par la *méthode des trapèzes*, qui consiste simplement à prendre la demi-somme de R_g et R_d .

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1}) .$$

Si on imagine un modèle où la fonction à intégrer f est encore plus lisse, on gagnera en l'interpolant par une parabole sur des triplets de points successifs. C'est la *méthode de Simpson*.

Pour donner une idée de la précision atteinte, supposons que nous disposions d'une table de 101 valeurs régulièrement espacées de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. L'intégrale de $\sin(x)$ sur $[0, \pi/2]$ vaut 1. Voici ce que donnent la méthode des rectangles à droite et à gauche, la méthode des trapèzes, et la méthode de Simpson.

$$R_g = 0.9921255 , \quad R_d = 1.0078334 , \quad T = 0.9999794 , \quad S = 1.0000000003 .$$

Quand une fonction est donnée par une expression qui permet de la calculer en n'importe quel point, il serait particulièrement inefficace de l'évaluer en 101 points régulièrement espacés, pour se ramener au cas précédent. On utilise plutôt les *méthodes de quadrature de Gauss*. Voici comment fonctionne la plus simple, celle de Gauss-Legendre. Soit une fonction f à intégrer sur l'intervalle $[a, b]$. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut se ramener au cas où $a = -1$ et $b = 1$. Les points auxquels on doit évaluer la fonction sont les racines des *polynômes de Legendre*.

On peut définir ces polynômes par récurrence, par une équation différentielle, ou bien comme la dérivée n -ième d'un polynôme de degré $2n$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \left((x^2 - 1)^n \right)^{(n)}.$$

Les racines de P_n sont dans l'intervalle $[-1, 1]$, et réparties de façon symétrique par rapport à l'origine. Comme P_n est de degré n , il a n racines : notons-les $x_1, \dots, x_n$. À la racine x_i , on associe le « poids » ω_i :

$$\omega_i = \frac{2}{(1 - x_i)^2 (P'_n(x_i))^2}.$$

On calcule ensuite la somme :

$$L_n = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i).$$

Les racines des polynômes de Legendre, ainsi que les poids qui leur sont associés sont connus depuis longtemps, et inclus dans les bibliothèques de codes des langages de calcul scientifique : le calcul de L_n est donc extrêmement rapide. Vous apprendrez plus tard les raisons mathématiques pour lesquelles ce calcul donne une valeur approchée précise de l'intégrale de f . Les résultats sont spectaculaires. Voici pour la même fonction sinus entre 0 et $\pi/2$, ce que donne la méthode de Gauss-Legendre pour $n \leq 5$.

$$L_2 - 1 = -1.5 \cdot 10^{-3}, \quad L_3 - 1 = 8.1 \cdot 10^{-6}, \quad L_4 - 1 = -2.3 \cdot 10^{-8}, \quad L_5 - 1 = 3.9 \cdot 10^{-11}.$$

Ainsi, en évaluant la fonction sinus en 5 points seulement, on calcule son intégrale avec une précision de l'ordre de 10^{-11} : impressionnant non ?

3.4 Les différentes intégrales

L'idée qu'une intégrale pouvait être calculée comme une somme de petits rectangles était depuis longtemps bien admise. Voici ce qu'en dit Pascal (1623-1662).

On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme [...] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune autre donnée.

Il faudra attendre encore deux siècles après Pascal, avant qu'on ne donne un sens rigoureux aux expressions « nombre indéfini de rectangles » et « moindre qu'aucune autre donnée » : celui d'une limite pour des subdivisions dont le pas tend vers 0.

Vers 1670, Newton et Leibniz firent simultanément la découverte fondamentale que l'intégration et la dérivation étaient des opérations inverses l'une de l'autre. Pour calculer une aire, il suffisait désormais de connaître une primitive de la fonction qui la

délimitait. Ceci fit quelque peu passer au second plan la méthode d'intégration des Grecs et des Arabes, consistant à découper l'aire à calculer en petits rectangles. Mais jusqu'au XIX^e siècle, personne ne s'était posé la question de définir la convergence d'une somme d'aires de petits rectangles, vers une intégrale.

En 1823, Cauchy fut le premier à tenter une définition rigoureuse, pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Malheureusement, la définition de la continuité qu'il donnait confondait continuité et continuité uniforme, deux notions qui ne seront distinguées que bien après lui. Plus grave, Cauchy énonçait et « démontrait » un théorème faux, selon lequel l'intégrale de la limite d'une suite de fonctions serait toujours la limite de la suite des intégrales de ces fonctions.

Tout le monde était d'accord depuis longtemps sur l'intégrale des fonctions en escalier. À partir de là, il semblerait qu'il suffise de dire qu'une fonction est limite en tout point de fonctions en escalier, et de passer à la limite sur les intégrales. Ce n'est malheureusement pas si simple. L'exemple suivant vous aidera à comprendre pourquoi. Pour tout entier n , définissons la fonction f_n , de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases}.$$

Pour tout n , f_n est une fonction en escalier, dont l'intégrale vaut 1. Pourtant, pour tout $x \in]0, 1]$, la suite $f_n(x)$ tend vers 0 (elle est nulle à partir d'un certain rang). Or la fonction nulle est d'intégrale nulle : n'en déplaise à Cauchy, l'intégrale de la limite n'est pas toujours la limite des intégrales !

En 1854, Riemann proposa un raffinement des définitions de Cauchy, qu'il rendait rigoureuses, tout en les adaptant à des fonctions qui n'étaient plus nécessairement continues. L'idée d'approcher l'intégrale par une subdivision de l'intervalle d'intégration restait la même.

En 1902, Lebesgue proposa une nouvelle approche : au lieu de subdiviser l'intervalle d'intégration, il subdivisait l'intervalle des valeurs de la fonction. La théorie de Lebesgue, si elle est plus difficile à comprendre, présente de nombreux avantages sur celle de Riemann : les théorèmes de convergence sont plus puissants, et plus de fonctions peuvent être intégrées. L'intégrale de Lebesgue vous sera enseignée par la suite.

Cependant, la construction de Lebesgue n'était toujours pas parfaitement satisfaisante. À peu près dix ans après Lebesgue, Arnaud Denjoy et Oskar Perron, proposèrent chacun une variante plus générale mais plus compliquée. Il fallut attendre la fin des années cinquante pour que Ralph Henstock (décédé le 6 janvier 2007) et Jaroslav Kurzweil se rendent compte que non seulement les intégrales de Denjoy et Perron étaient équivalentes, mais que l'on pouvait donner de leur théorie une version beaucoup plus simple : cette version, qui sort du cadre de ce cours, est connue sous le nom d'intégrale de Henstock-Kurzweil.

Entre temps, bien d'autres mathématiciens ont laissé leur nom à une définition d'intégrale, comme Darboux, Stieltjes, Daniell, Radon, Itô, etc.

3.5 La mésaventure de Chasles

Michel Chasles (1793-1880) avait des relations : il était titulaire d'une chaire de géométrie à la Sorbonne créée tout spécialement pour lui, et membre de l'Académie des Sciences. Il aimait l'histoire et collectionnait les documents anciens, il était aussi d'un patriotisme fervent... et d'une naïveté désarmante.

Un jour de 1861, il reçut un certain Vrain-Lucas, qui se disait dépositaire d'un lot de vieux papiers sur lequel il sollicitait l'avis éclairé du grand académicien. Celui-ci, émerveillé, reconnut aussitôt dans les premiers échantillons fournis un inestimable trésor pour notre patrimoine national : des lettres du grand Pascal, dont certaines établissaient clairement que leur auteur avait découvert l'attraction universelle avant Newton ; quelle fierté ! Pendant des années, Chasles acheta tout ce que Vrain-Lucas pouvait lui fournir : en tout, pas moins de vingt sept mille documents, payés cent quarante mille francs, une fortune pour l'époque. Tant pis si quelques esprits chagrins faisaient remarquer que dans les lettres de Pascal apparaissaient des données astronomiques recueillies bien après sa mort. Tant pis si dans une lettre, Galilée se plaignait de sa vue qui devenait mauvaise, alors qu'il l'avait perdue depuis quatre ans : qu'à cela ne tienne, Chasles exhibait aussitôt d'autres lettres fournies par Vrain-Lucas, qui comme par hasard répondaient exactement à ses détracteurs. À ceux qui s'étonnaient que Jules César, Cléopâtre, Socrate, Cicéron, Hérode ou Vercingétorix aient tous écrit dans le même vieux français fantaisiste, Vrain-Lucas répondait qu'un savant du temps de Charlemagne avait rassemblé cette collection de lettres anciennes, qu'il avait déposée dans une abbaye. Sept siècles plus tard, Rabelais avait traduit les lettres, et Chasles était l'heureux acheteur des copies autographes de Rabelais.

Le procès pour fraude de Vrain-Lucas eut lieu en 1870. Chasles vint lui-même exposer au tribunal comment il avait enfin découvert la supercherie : il avait fait surveiller Vrain-Lucas qui tardait à livrer trois mille nouvelles lettres qu'il avait promises (il fallait bien le temps de les écrire !). Pendant les huit ans que dura l'affaire, Chasles n'avait apparemment jamais eu le moindre doute, aveuglé qu'il était sans doute par la fierté d'être celui qui conserverait à la France ces témoignages inestimables de son passé glorieux. Voici pour conclure un extrait d'une lettre d'Alexandre le Grand à Aristote (sic), qui fit éclater de rire l'auditoire du tribunal.

Quant à ce que m'avez mandé d'aller faire un voyage au pays des Gaules, afin d'y apprendre la science des druides, non seulement vous le permettez, mais vous y engagez pour le bien de mon peuple, car vous n'ignorez pas l'estime que je fais d'icelle nation que je considère comme étant ce qui porte la lumière dans le monde.